МАТЕМАТИКА 8

УЏБЕНИК ЗА ОСМИ РАЗРЕД ОСНОВНОГ ОБРАЗОВАЊА

Д-р Костадин Тренчевски
Д-р Билјана Крстеска
Весна Бојаџиева

lamina

МАТЕМАТИКА 8 уџбеник за осми разред основног образовања
Ауторска права © 2026, Арс Ламина – публикације

Издавач
Арс Ламина – публикације, Скопље 2026

Главни уредник
Бранка Бугариска

Уредник
Биљана Стојоска Златков

Аутори
Др Костадин Тренчевски
Др Биљана Крстеска
Весна Бојаџијева

Превод са македонског језика
Сашо Христовски
Назив оригинала: „Математика 8 учебник за осмо одделение во основно образование“

Језичка редакција
Снежана Ивановић

Рецензенти
Проф. др Љупчо Настовски
Проф. др Крутан Расими
Јованка Вангелова

Дизајн
Pointer Creative Agency

Графичко и техничко уређење
Арс Ламина – публикације

Штампа
Арс Ламина, Скопље 2026

Тираж
25

Сва права су задржана. Ниједан део ове књиге не сме бити прештампаван нити преношен у било ком облику или било којим средствима, електронским или механичким, укључујући фотокопирање, документовање или чување у систему за поновно проналажење података без писмене сагласности издавача.

Овај уџбеник је одобрен за употребу у деветогодишњем основном образовању, Одлуком о одобравању и употреби уџбеника за наставни предмет Математика за VIII разред основног образовања број 26-708/1 од 5.6.2026. године, Министарство просвете и науке Републике Северне Македоније.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.41

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Математика 8 : уџбеник за осми разред основног образовања / Костадин Тренчевски, Биљана Крстеска, Весна Бојаџијева ; [превод са македонског језика Сашо Христовски]. - Скопје : Арс Ламина-публикации, 2026. - 410 стр. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика 8 учебник за осмо одделение во основно образование. - Библиографија: стр. 410

ISBN 978-608-280-323-4

1. Крстеска, Биљана [автор] 2. Бојаџијева, Весна [автор]

COBISS.MK-ID 69198853

КАКО СЕ КОРИСТИ ОВАЈ УЏБЕНИК?

Уџбеник је подељен на пет тема и свака тема има различиту боју:

ТЕМА 1: Бројеви и операције са бројевима

ТЕМА 2: Геометрија

ТЕМА 3: Алгебра

ТЕМА 4: Мерење

ТЕМА 5: Рад са подацима

Садржаји у свакој теми су обрађени на лак и једноставан начин и у ту сврху се користе различита поља.

Активност

Свака лекција почиње уводном активношћу у којој се налазе питања или задаци кроз које ћеш се подсетити шта си научио претходних година.

Пример 1

Решени примери ће ти показати како да користиш правила која су дата у лекцији.

Задатак 1

Ови задаци су слични решеним примерима и требало би да их решиш самостално.

Ово поље дефинише појмове који се уче у лекцији и важно их је научити како би могао/ла да разумеш захтеве у задацима.

Ово поље садржи својства или правила која су важна у лекцији, а која треба да научиш да би могао/ла да решиш задатке.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

На крају сваке лекције налазе се задаци помоћу којих ћеш моћи да поновиш оно што је научено у тој лекцији.

Истраживање

Ово поље садржи задатке за проширивање и продубљивање знања.

На крају сваке теме налазе се задаци за понављање и утврђивање градива из теме.

Ови задаци ће ти помоћи да поновиш и продубиш знање из сваке лекције дате теме.

Садржај

ТЕМА 1: БРОЈЕВИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА БРОЈЕВИМА

1. Појам релације 8
2. Особине релација 13
3. Релација еквиваленције и релација подређивања 18
4. Релације у пракси 21
5. Рационални броеви 25
6. Бесконачни периодични децимални бројеви 30
7. Једнакост разломака, децималних бројева и процената 33
8. Израчунавање разломака и процената количина 37
9. Примена процената 40
10. Размер 42
11. Пропорционалне величине 47
12. Сабирање и одузимање рационалних бројева 54
13. Множење и дељење рационалних бројева 59
14. Особине операција са рационалним бројевима 64
15. Бројни изрази са рационалним бројевима 68
16. Сложени - двојни разломци 70
17. Степени са целобројном основом и степеновим показатељем - природним бројем 74
18. Квадратни корен и кубни корен 78
19. Писање бројева у облику $a \cdot 10^k$, за $a, k \in \mathbb{N}$ 84
20. Множење и дељење степена са истим основама 90

ТЕМА 2: ГЕОМЕТРИЈА

1. Углови са међусобно паралелним крацима и углови са нормалним крацима 100
2. Кружница, круг и њихови делови 105
3. Периферни угао 111
4. Конструкције неких специјалних врста троуглова 117
5. Појам подударности. Подударни троуглови 122
6. Знаци подударности троуглова 127
7. Питагорина теорема 138

8. Примена Питагорине теореме на троуглове 145
9. Четворугао, паралелограм. Правоугао, ромб и квадрат 149
10. Трапез и делтоид 156
11. Примена Питагорине теореме на четвороугле 163
12. Конструктивни задаци 169
13. Полиедар, лопта и сфера 175
14. Правилни полиедри 180
15. Однос између броја темена, ивица и зидова полиедра 183
16. Цртање сложених 3Д-облика 186
17. Комбинације транслација, ротација и осних симетрија 189
18. Идентификовање комбинација осне симетрије, ротације и транслације 194

ТЕМА 3: АЛГЕБРА

1. Моном 202
2. Сабирање и одузимање монома 206
3. Полином. Степен полинома 210
4. Сабирање и одузимање полинома 215
5. Множење полинома 219
6. Дељење полинома мономом 222
7. Поједностављивање целих рационалних израза 225
8. Замена променљивих целим бројевима у целим рационалним изразима и у формулама 228
9. Састављање и решавање линеарних једначина 233
10. Примена линеарних једначина са једном непознатом 237
11. Низови бројева и облика 242
12. Одређивање општег члана низа 245
13. Функција 251
14. Линеарна функција. График линеарне функције 258
15. Ток линеарне функције 264
16. Записање линеарне функције дате графиком 273

ТЕМА 4: МЕРЕЊЕ

1. Мерне јединице за време 286
2. Графици у временском контексту 289
3. Дужина кружнице 297
4. Дужина кружног лука 301
5. Периметар (обим) сложених 2Д облика 306
6. Површина паралелограма 311
7. Површина троугла 315
8. Површина трапеза 320
9. Површина ромба, делтоида и квадрата 324
10. Површина круга 328
11. Површина кружног исечка, кружног одсечка и кружног прстена 331
12. Плоштина призме и пирамиде 336
13. Запремина призме и пирамиде 342

ТЕМА 5: РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

1. Популација и узорак 353
2. Дискретни подаци. Табела фреквенција 359
3. Планирање истраживања и прикупљање података 365
4. Дијаграми 372
5. Стабло - лист дијаграм 378
6. Статистички прорачуни за груписане податке 383
7. Елементарни догађај. Супротан догађај. Вероватноћа 388
8. Догађаји који се међусобно искључују. Зависни и независни догађаји 395

Тема 1:

БРОЈЕВИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА БРОЈЕВИМА

Резултати учења:

Проучавајући ову тему, оспособићеш се да:

- решаваш проблеме у свакодневном контексту користећи релације између скупова.
- примењујеш једнакост разломака, децималних бројева и процената при упоређивању различитих количина.
- решаваш проблеме у свакодневном контексту помоћу размере и пропорционалности.
- користиш операције са рационалним бројевима у свакодневном контексту.
- у свакодневном контексту користиш степен са основом целог броја и показатељем- експонентом степена природног броја, квадратни и кубни корен природног броја.

1. ПОЈАМ РЕЛАЦИЈЕ

Активност

Дати су скупови
$A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b\}$.

а) Наведи и затим представи табеларно и описно скуп $A \times B$ свих уређених парова скупова A и B.

б) Запиши три произвољна подскупа M, N и P Декартовог производа $A \times B$.

Упознаћемо се са веома важним појмом у математици, појмом релације. Ова реч у свакодневном животу има широко значење, али у математици има веома прецизан смисао и значење.

Пример 1

Цртеж 1 приказује Венов дијаграм скупа A од четири ђака и скупа B од пет градова:
$A = \{$Влатко, Мајлинда, Биљана, Борче$\}$ и
$B = \{$Битољ, Штип, Скопље, Дебар, Охрид$\}$.
Стрелице показују које градове у скупу B је посетио сваки ђак из скупа A.
Шта се можеш закључити из дијаграма?

Две стрелице полазе од Влатка, једна према Битољу, а друга према Скопљу. Оне указују да је Влатко посетио Битољ и Скопље. Кажемо да је Влатко **у релацији** са Битољем, а такође и да је Влатко **у релацији** са Скопљем.
Ниједна стрелица не почиње од Мајлинде. То значи да Мајлинда није посетила ни у један од наведених градова. Кажемо да Мајлинда **није у релацији** ни са једним од наведених градова.
Ниједна стрелица не долази до града Дебра. То значи да ниједан од ђака није посетио овај град. Кажемо да ниједан од ђака **није у релацији** са Дебром.



цртеж 1

У овом случају кажемо да је уз помоћ стрелица дата **релација** према правилу придруживања „...посетио град...“ међу елементима скупова A и B. На *цртежу 1*, елементи скупова A *и* B су представљени Веновим дијаграмима, а елементи који се налазе у релацији из два скупа повезани су стрелицама. За овакав начин представљања кажемо да је представљање **графом** дате релације. Свака стрелица у графу *цртежа 1* замењује један уређени пар објеката, од којих је први елемент A и стоји на почетку стрелице, а други је елемент B и стоји на крају стрелице. Постоји онолико уређених парова колико има стрелица.
Сходно томе, у примеру 1 добијамо уређене парове:
(Влатко, Битољ), (Влатко, Скопље), (Биљана, Битољ), (Биљана, Штип), (Биљана, Скопље), (Биљана, Охрид), (Борче, Скопље), (Борче, Охрид).
Сви уређени парови у релацији од A до B формирају прецизно дефинисан скуп, који је подскуп Декартовог производа скупова A и B.

Задатак 1

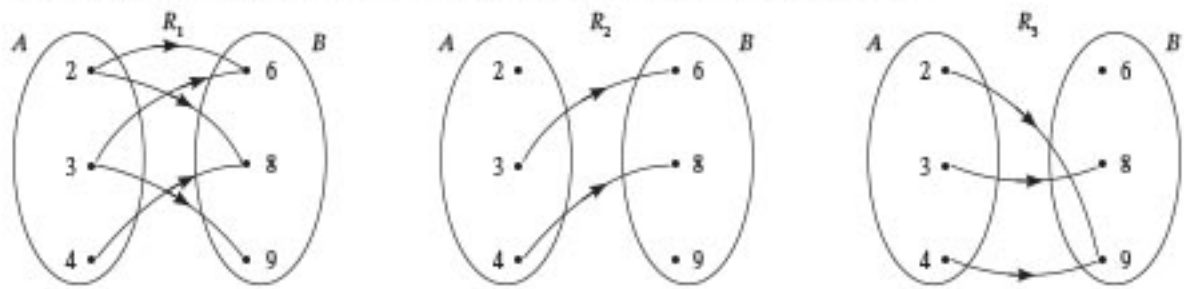
На цртежу 2 приказан је граф релације одређене правилом придружавања „...је рођен/рођена у...“ између скупова A и B.
Да ли ђак из скупа A може бити у релацији са више градова из скупа B? Објасни свој одговор.



цртеж 2

Задатак 2

На цртежу 3 помоћу графа између скупова A и B, дате су три релације, R_1, R_2 и R_3. Правило придруживања релације R_1 је одређено са: „...садржи се у...“.
Покушај да откријеш правило асоцијације сваке од релација R_2 и R_3.



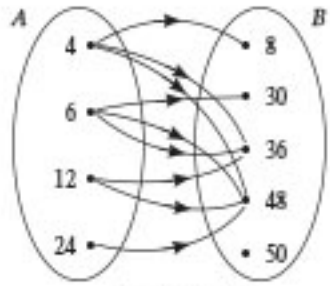
цртеж 3

Нека су A и B два непразна скупа. Било који подскуп R Декартовог производа $A \times B$ назива се **релацијом** између скупова A и B.

Ако је $(x, y) \in R$, кажемо да је x **у релацији** са y и пишемо $x\,R\,y$.

Пример 2

Дати су скупови $A = \{4, 6, 12, 24\}$ и $B = \{8, 30, 36, 48, 50\}$. На цртежу 4 приказан је граф релације R: „...је делилац броја...“ између скупова A и B.
Представи релацију R:
а) на описни начин, б) на табеларни начин.



цртеж 4

Релација R, посматрана као подскуп Декартовог производа $A \times B$, може се представити:
а) на **описан начин**, истичући везу између елемената који су у релацији
$R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x \mid y\}$;
б) на **табеларни начин**, записивањем свих уређених парова који чине
$R = \{(4, 8), (4, 36), (4, 48), (6, 30), (6, 36), (6, 48), (12, 36), (12, 48), (24, 48)\}$.

Задатак 3

Дати су скупови $A = \{4, 6, 17, 18\}$ и $B = \{6, 19, 20, 24\}$, представи релацију
R: "...је за 2 мање од..." из скупа A у скуп B.
а) графиком б) описно, в) табеларно.

Релације се могу дати и између елемената истог скупа.

Пример 3

Дат је скуп M = {Битољ, Прилеп, Штип, Охрид, Дебар, Радовиш, Пехчево}.
Нацртај граф релације у скупу M: „Последње слово имена града ... је прво слово имена града ...“.

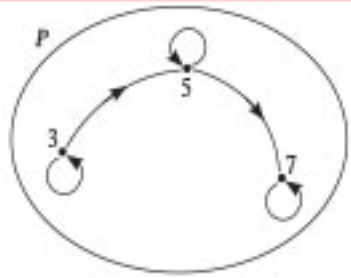
Цртеж 5 приказује граф дате релације.



цртеж 5

Задатак 4

Представи релацију R између елемената скупа $P = \{3, 5, 7\}$ приказаног графом на слици 6:
а) на описни начин, б) на табеларни начин.



цртеж 6

Задатак 5

У скупу $Q = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ дата је релација $R = \{(x, y) \mid x, y \in Q \text{ и } y = x + 2\}$. Представи релацију R:
а) графом, б) табеларно.

Задатак 6

На слици 1 приказани су омиљени спортови Ане, Матеја и Лиридоне. Они бирају између спортова фудбала, кошарке и пливања.



слика 1

а) Прикажи у табеларном облику релацију R: „...-ов омиљени спорт је ...“.
б) Да ли двоје деце има исти омиљени спорт?
в) Да ли неко дете има више од једног омиљеног спорта?

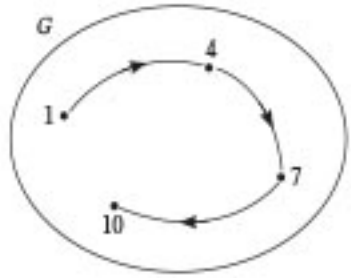
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Од понуђених укуса сладоледа: ванила, чоколада и јагода, Ива је изабрала укус ваниле, а Борис укус чоколаде.
   а) Представи релацију R графом: „...изабрао/ла је укус...“.
   б) Да ли су два ученика изабрала исти укус сладоледа?
   в) Да ли је неки ученик изабрао више од једног укуса сладоледа?
   г) Да ли постоји укус сладоледа који није изабран?

2. Наставница је питала ученике Петра, Емину и Марију које спортове тренирају. Добила је одговор да:
   Петар тренира фудбал, Емина тренира гимнастику, Марија тренира пливање, а Петар тренира кошарку.
   а) Представи релацију R графом: „...тренира...“.
   б) Да ли неки ученик тренира више од једног спорта?
   ц) Да ли неко од ученика не тренира ниједан спорт?

3. Прикажи релацију R између елемената скупова C и D графом, ако је:
   а) $C = \{6, 9, 18, 29, 36\}$, $D = \{12, 15, 24, 27, 35, 42\}$ и R: "...је за 6 веће од...",
   б) $C = \{30, 24, 27, 18, 9, 12\}$, $D = \{8, 10, 3, 6, 9, 5\}$ и R: "...је 3 пута мање од...".

4. Представи релацију R између елемената скупа $G = \{1, 4, 7, 10\}$ приказаних графом на слици 7: а) на описни начин, б) на табеларни начин.



цртеж 7

5. У скупу $P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ дата је релација $R = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ и } y = 2x\}$.
   Представи релацију R: а) графом, б) на табеларни начин.

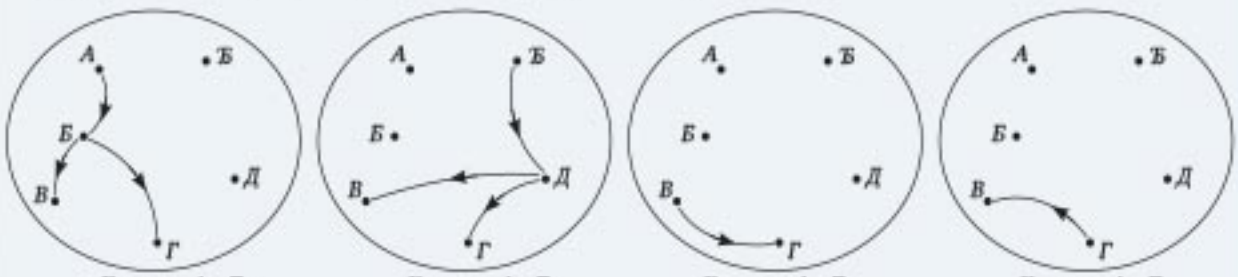
6. Ана је вежбала сваког радног дана прошле недеље како би се припремила за спортско такмичење. Бележила је колико минута је вежбала и колико калорија троши сваког дана. Подаци о њеном недељном вежбању приказани су у табели:

дан у седмици	време вежбања (min)	калорије (kcal)
понедељак	20	100
уторак	30	150
среда	25	125
четвртак	40	200
петак	35	175

Објасни релацију између времена вежбања и потрошених калорија.
Представи опредељену релацију а) графом б) на табеларни начин

Истраживање

У скупу $C = \{А, Б, В, Г, Д, Ђ\}$ чланова породице, дате су следеће релације:
R_1 "...је отац...", R_2 „...је мајка...", R_3 „...је брат..." и R_4 „...је сестра...".



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

цртеж 8

Користећи њихове графиконе, приказане на слици 8, открij састав и родбинске односе међу члановима породице.

2. ОСОБИНЕ РЕЛАЦИЈА

Кроз примере из математике, али и из свакодневног живота, открићеш зашто су својства релација важна и како ће ти помоћи да опишеш односе између елемената у једном скупу на прецизан и логичан начин.

За релацију R у скупу A кажемо да је **рефлексивна** ако и само ако $(x, x) \in R$, за свако $x \in A$, односно

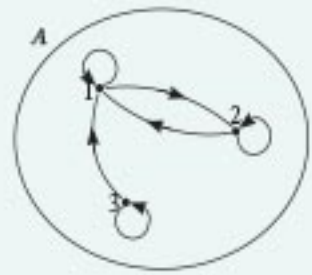
$x \, R \, x$, за свако $x \in A$.

Пример 1

У скупу $A = \{1, 2, 3\}$ дата је релација
$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 1)\}$.
Провери да ли је релација R рефлексивна.

Релација је рефлексивна, јер уређени парови (1, 1), (2, 2) и (3, 3) припадају R, односно 1 R 1, 2 R 2 и 3 R 3 што значи да је услов $x \, R \, x$ испуњен, за свако $x \in A$.

До истог закључка можемо доћи ако погледамо граф релације приказан на *цртежу 1*. Од сваког елемента x, и полази стрелица која се завршава у самом том елементу и назива се **веза.**



цртеж 1

Кажемо да је релација R у скупу A **симетрична** ако и само ако $(x, y) \in R$ повлачи $(y, x) \in R$, за свако $x, y \in A$, односно,

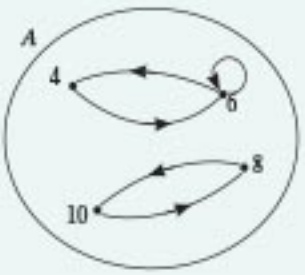
$x \, R \, y$, повлачи у $R \, x$, за свако $x, y \in A$.

Пример 2

У скупу $A = \{4, 6, 8, 10\}$ дата је релација
$R = \{(4, 6), (6, 6), (6, 4), (8, 10), (10, 8)\}$.
Провери да ли је релација R симетрична.

За пар (6, 6) од R и пар (6, 6) припада R,
за пар (4, 6) од R и пар (6, 4) припада R,
за пар *(6, 4)* од R и пар (4, 6) припада R,
за пар (8, 10) од R и пар (10, 8) припада R,
што значи да је услов $x \, Ry$ у задовољен, повлачи $y \, R \, x$, за све $x, y \in A$.

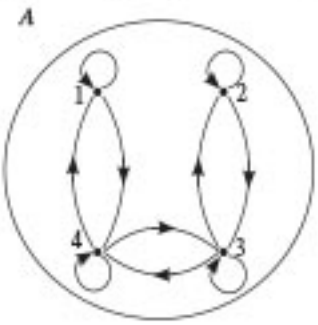
До истог закључка можемо доћи ако разгледамо г рафик релације R приказана *цртежу 2.*
Примећујемо да уколико постоји стрелица од елемента x до елемента y, тада постоји и стрелица од елемента y до елемента x, односно граф релације R има само **двоструке везе.**
У овом случају, петљу сматрамо двоструком везом.



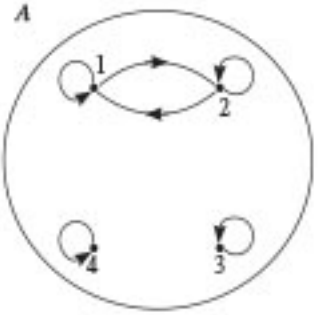
цртеж 2

Задатак 1

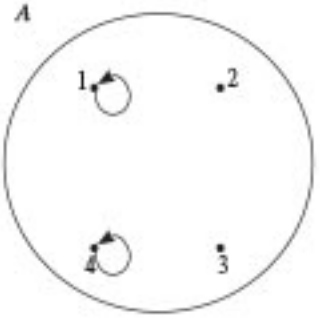
Релације R_1, R_2 и R_3 у скупу $A = \{1, 2, 3, 4\}$ су представљене својим графовима на *цртежу3.* Које од њих су рефлексивне, а које симетричне? Објасни свој одговор.



Релација R_1



Релација R_2



Релација R_3

цртеж 3

Задатак 2

Марко, Соња и Ерол живе у истој згради. Марко живи на четвртом спрату, Соња живи на петом спрату, а Ерол живи на четвртом спрату. Међу ђацима, према спрату на којем живе, одређена је релација R: „...живи на истом спрату као и..."

а) Представи релацију табеларно и помоћу графа.

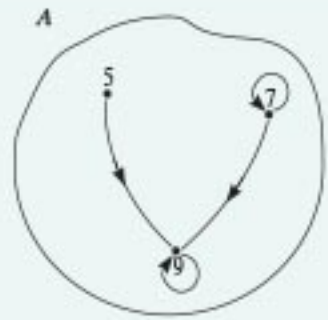
б) Да ли је релација R рефлексивна и симетрична? Објасни свој одговор.

Кажемо да је релација R у скупу A **антисиметрична** ако и само ако
$(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, имплицира $x = y$, за свако $x, y \in A$, односно,
$x R y$ и $y R x$ повлачи да је $x = y$, за свако $x, y \in A$.

Пример 3

У скупу $A = \{5, 7, 9\}$ дата је релација $R = \{(5, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\}$.
Проверити да ли је релација R антисиметрична.

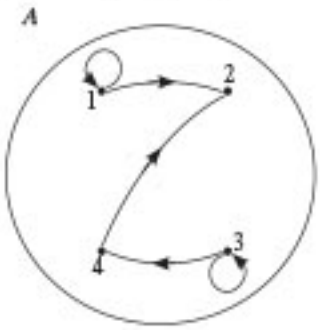
За пар (5, 9) елемента R, пар (9, 5) не припада R,
а за пар (7, 9) елемента R, пар (9, 7) не припада R.
Према томе, ако је $x\,R\,y$ и $y\,R\,x$ тада је $x = y$,
за свако $x, y \in A$, то значи да је релација
антисиметрична.
До истог закључка можемо доћи ако посматрамо
граф релације R приказан на *цртежу 4*.
Примећујемо да ако постоји стрелица од елемента x
до елемента y, $x \neq y$, тада не постоји
стрелица од елемента y до елемента x, односно граф
релације R нема ниједну двоструку везу осим можда петљу.



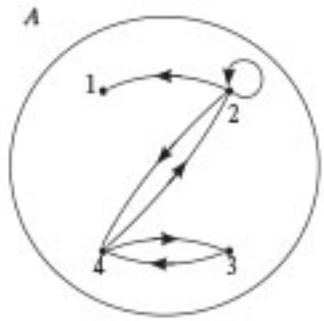
цртеж 4

Задатак 3

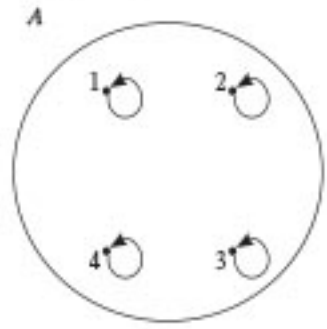
Релације R_1, R_2 *и* R_3 *у скупу* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ су представљене својим графицима на *цртежу 5*.
Које од релација су рефлексивне, а које антисиметричне? Објасни одговор.



Релација R_1



Релација R_2



Релација R_3

цртеж 5

Задатак 4

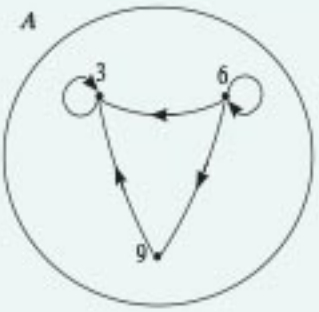
Филип, Иван и Лидија иду у исту школу. Познато је да Филип има 14 година, Иван има 12 година, а Лидија има 7 година. Међу ученицима, према њиховој узрасти, релација R је одређена:„...је старији од...“.
а) Представи релацију у табеларном облику и графиком.
б) Да ли је релација R антисиметрична? Објасни свој одговор.

За релацију R у скупу A кажемо да је **транзитивна** ако и само ако $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ повлачи $(x, z) \in R$, за свако $x, y, z \in A$, односно
$x\,Ry$ и y R z и $x\,R\,z$, за свако $x, y, z \in A$.

Пример 4

У скупу $A = \{3, 6, 9\}$ дата је релација $R = \{(3, 3), (6, 6), (6, 3), (6, 9), (9, 3)\}$.
Провери да ли је релација транзитивна.

Проверимо све могуће случајеве:
за парове (3, 3) и (3, 3) од R и пар (3, 3) припада R;
за парове (6, 6) и (6, 6) од R и пар (6, 6) припада R;
за парове (6, 6) и (6, 3) од R и пар (6, 3) припада R;
за парове (6, 6) и (6, 9) од R и пар (6, 9) припада R;
за парове (6, 3) и (3, 3) од R и пар (6, 3) припада R;
за парове (6, 9) и (9, 3) од R и пар (6, 3) припада R.
за парове (9, 3) и (3, 3) од R и пар (9, 3) припада R;
Видимо да је услов x, R y и y, R z задовољен, тада x, R, z, за свако $x, y, z \in A$.



цртеж 6

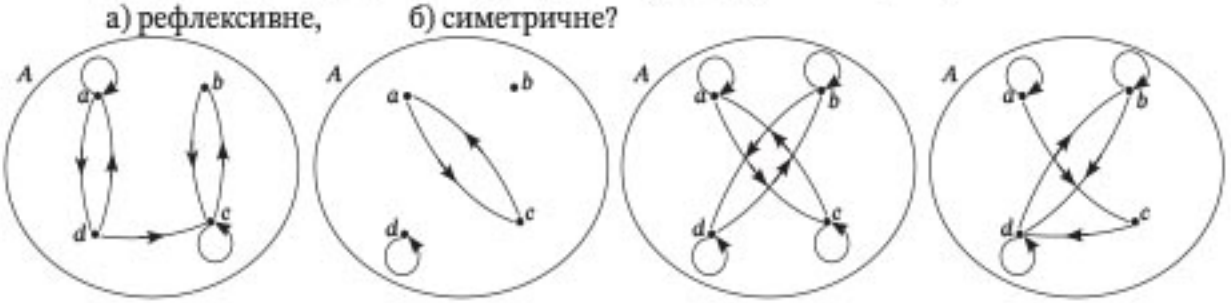
До истог закључка долазимо ако размотримо граф релације R приказан на *цртежу 6*.
Уочавамо да уколико постоји стрелица од елемента x до елемента y, и од елемента y до елемента z, онда постоји стрелица од елемента x до елемента z (у проверу укључујемо и петље).

Задатак 5

У школском дворишту, ученици Ана, Бесид, Вера и Горан се постројавају за спортски тренинг. Наставник жели да поређа ученике по висини. Ана је висока 150 cm, Бесид је висок 155 cm, Вера је висока 150 cm, а Горан је висок 160 cm.
Наставник користи релацију R: „...је виши или исте висине као...“
а) Представи релацију табеларно и графиком.
б) Утврди да ли је релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

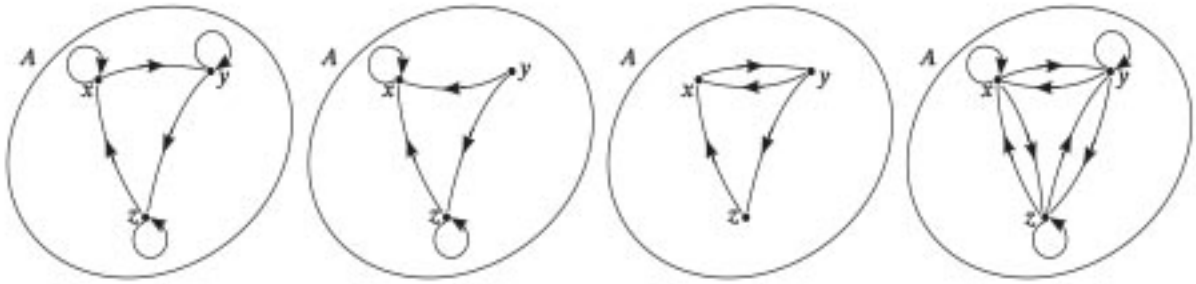
1. Које од релација R_1, R_2, R_3 и R_4 у скупу $A = \{a, b, c, d\}$ на слици 7 су:
а) рефлексивне, б) симетричне?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

цртеж 7

2. Које од релација R_1, R_2, R_3 и R_4 у скупу $S = \{x, y, z\}$ на слици 8 су:
а) антисиметричне, б) транзитивне?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

цртеж 8

3. У скупу $X = \{a, b, c, d\}$, дате су релације R_1, R_2, R_3 и R_4 тако да је:
   $R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (d, c)\}$, $R_2 = \{(a, b), (a, d), (b, c), (d, c)\}$,
   $R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, b)\}$ и $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, b), (d, d)\}$.
   Које од датих релација су транзитивне?
4. У скупу $T = \{1, 2, 3, 5\}$, дате су релације: R_1: „... је мање од ...“,
   R_2 : „... није мање од ...“, $R_3 = \{(x, y) \mid x, y \in T, x + y$ је паран број$\}$ и
   $R_4 = \{(3, 2), (1, 1), (2, 3), (5, 5), (1, 5), (5,1)\}$.
   Представи сваку релацију графиком и испитај њена својства: рефлексивност, симетрију, антисиметрију и транзитивност.

5. Дејан има 19 година, Симона има 16 година, а Горан има 18 година.
   У скупу $A = \{$Дејан, Симона, Горан$\}$ дата је релација R:„...је млађи од...“.
   а) Представи релацију R графиком.
   б) Да ли је релација транзитивна? Објасни свој одговор.

6. Ученици Елена, Игор, Марко и Илир су извели по једну музичку композицију. Професор жели да успостави релацију између ученика према темпу (откуцајима-ударима у минути) изведене композиције. Темпо Еленине композиције био је 60 откуцаја у минути, Игоров је био 100 откуцаја у минути, Марков 60 откуцаја у минути, а Илиров 120 откуцаја у минути.
   а) Представи графом релацију R: „...изведи композицију истим или споријим темпом од темпа композиције...“.
   б) Испитај својства релације: рефлексивност, симетрију, антисиметрију и транзитивност.

7. У скупу $D = \{$Немачка, Француска, Шпанија, Италија, Белгија, Швајцарска$\}$, релација R је дефинисана: „...има заједничку копнену границу са...“.
   а) Графиком представи релацију R.
   б) Да ли је релација рефлексивна, симетрична или транзитивна? Објасни свој одговор.

   Упутство: Користи географску карту или интернет да би утврдио/ла које земље имају заједничке копнене границе.

Истраживање

Запиши табеларно скуп чланова твоје породице. Затим, табеларно запиши и релације: R_1 : „...је старији од...“ и R_2 „...није млађи од...“.
а) Испитај својства релације R_1 и R_2.
б) Открij по ком својству се релације R1 и R2 разликују?

3. РЕЛАЦИЈА ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ И РЕЛАЦИЈА ПОДРЕЂИВАЊА

Активност

У скупу $L = \{35, 25, 38, 75, 573, 735, 921\}$ дата је релација
R: „...има исту цифру десетица као...“.
а) Представи релацију графиком. б) Испитај својства релације.

За релацију R у скупу A кажемо да је **релација еквиваленције** ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релација еквиваленције повезује елементе који се сматрају једнаким према неком својству.

Пример 1

Наставник матерњег језика даје ученицима задатак да групишу различите речи са истим значењем, тј. синониме. На пример, речи „срећан“, „радосан“ и „весео“ су синоними. Да ли се на овај начин одређује релација еквиваленције у скупу речи матерњег језика?

Да, зато што је ова релација:
- рефлексивна, јер је свака реч синоним за себе;
- симетрична, јер, на пример, ако је „срећан“ синоним за „радосан“, онда је „радосан“ синоним за „срећан“;

- транзитивна, јер, на пример, ако је „срећан“ синоним за „радосно“, онда је „радосно“ синоним за „весело“, онда је „срећан“ такође синоним за „радосно“.

Дакле, синоними одређују однос и еквиваленцију према свом значењу.

Задатак 1

У скупу S од свих аутомобила на паркингу, разматрамо релацију, R: „...има исту боју као...“. Провери да ли је R релација еквиваленције у скупу S.

Активност

У скупу $L = \{1, 2, 3, 5\}$ дата је релација R: „...није мања од...“.
а) Представи релацију графом. б) Испитај својства релације.

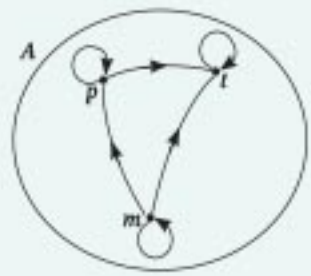
Кажемо да је релација R у скупу A **релација подређивања** ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Релација подређивања успоставља редослед међу елементима скупа према одређеном својству (величина, висина, број елемената итд.).

Пример 2

У скупу $A = \{p, m, t\}$, дата је релација R: „...није у енглеском алфабету после...“.
а) Представи релацију R графом.
б) Провери да ли је R релација еквиваленције или релација подређивања.

а) График релације R је приказан на цртежу 1.
б) Релација R има следећа својства.
- рефлексивна: p није у енглеском алфабету после p, што значи $(p, p) \in R$;
  m није у енглеском алфабету после m, што значи $(m, m) \in R$; и t није у енглеском алфабету после t, што значи $(t, t) \in R$.



цртеж 1

- антисиметрична: m није у енглеском алфабету после p, па није тачно да p није у енглеском алфабету после m, што значи $(m, p) \in R$, већ $(p, m) \notin R$;

p није у енглеском алфабету после t, тако да није тачно да t није у енглеском алфабету после p, што значи $(p, t) \in R$, но $(t, p) \notin R$; и p није у енглеском алфабету после t, тако да није тачно да t није у енглеском алфабету после p, што значи $(p, t) \in R$, већ $(t, p) \notin R$; и m није у енглеском алфабету после t, тако да није тачно да t није у енглеском алфабету после m, што значи $(m, t) \in R$, већ $(t, m) \notin R$.

- транзитивна: m није у енглеском алфабету после p, а p није у енглеској абецеди после t, али m није у енглеском алфабету после t, што значи $(m, p) \in R$ *и* $(p, t) \in R$ повлачи да $(m, t) \in R$.

Пример 3

Систематским прегледом утврђено је да је Петар висок 160 cm, Нина је висока 170 cm, а Изет је висок 180 cm. Скуп ученика има релацију R: „...има исту или мању висину од...“. Да ли се тако одређује релација за уређивање скупа ученика?

Ученици Петар, Нина и Изет имају различите висине. Релација R је рефлексивна, јер сваки ученик има исту висину као и његова сопствена висина. Релација R је антисиметрична, јер: Петар је исте или мање висине од Нине, али Нина није исте или мање висине од Петра; Петар је исте или мање висине од Изета, али Изет није исте или мање висине од Петра; Нина је исте или нижа од Изета, али Изет није исте или мање висине од Нине.

Релација R је транзитивна, јер ако је један ученик исте или мање висине од другог ученика, а други је исте или мање висине од трећег ученика, онда је и први ученик исте или мање висине од трећег ученика.

Дакле, R је релација подређивања.

Напомена: Ако у датом скупу ученика два ученика имају исту висину, онда релација дефинисана на овај начин неће бити антисиметрична. Зашто?

Задатак 2

У скупу $A = \{3, 5, 7\}$ дате су релације: $R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ и } x = y\}$ и $R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ и } x \leq y\}$. Представи релације: а) у табеларном облику, б) помоћу графа.

Да ли је нека од релација, релација еквиваленције или релација подређивања?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. У скупу $B = \{22, 28, 35, 43, 82\}$ дата је релација R: „...има исту цифру јединица као...“ .
   а) Представи релацију помоћу графа.
   б) Провери да ли је R релација еквиваленције или релација подређивања.
2. У скупу $K = \{a, b\}$ дата је релација $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
   Да ли је R релација еквиваленције или релација подређивања?

3. У скупу $M = \{3, 5, 7, 9\}$, дата је релација R: „...је веће или једнако са...“.
   а) Представи релацију R помоћу графа.
   б) Провери да ли је R релација еквиваленције или релација подређивања.

4. У скупу нумеричких израза $C = \{18 - 2 \cdot 3, 30 - 3 \cdot 4, 4 \cdot 5 - 8, 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4, (5 - 2) \cdot 4\}$ дата је релација R: „...има исту вредност као..“.
   а) Представи релацију R помоћу графа.
   б) Провери да ли је R релација еквиваленције или релација подређивања.

5. Да ли су релације: R_1: „...није виши од...“, R_2: „...није старији од...“ и R_3: „...није тежи од...“, дефинисане у скупу ученика у школи, релације подређивања? Објасни свој одговор.

6. На часовима историје, ученици су добили податке да се: освајање Цариграда од стране Османлија догодило 1453. године, откриће Америке од стране Колумба догодило 1492. године, Француска револуција догодила 1789. године и да се потписивање Универзалне декларације о људским правима догодило 1948. године.
   а) Успостави релацију R између ових догађаја, према времену када су се догодили?
   б) Да ли је R релација подређења?

Истраживање

Помоћу информација са интернета, пронађи податке о времену разлагања отпада у природи и то: папира, пластичних кеса, алуминијумских конзерви и коре од јабуке. Рангирај отпад према времену разлагања.
Да ли може да се успостави веза за подређивање отпада? Објасни свој одговор.

4. РЕЛАЦИЈЕ У ПРАКСИ

Активност

Ученици Ана, Борис, Драган и Емина играју фудбал, кошарку или одбојку. Познато је да Ана и Драган играју одбојку, Борис игра фудбал и кошарку, а Емина игра кошарку.
а) Представи релацију R: „...игра исти спорт као...“ пред ђацима табеларно, описно и помоћу графа.
б) Да ли је R релација еквиваленције? Зашто?

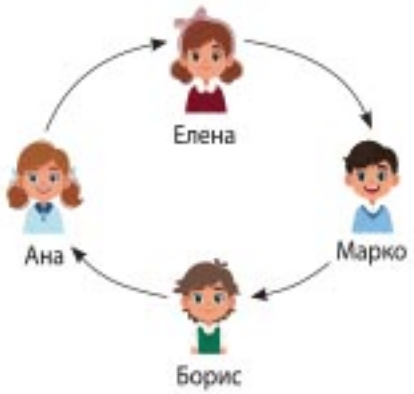
Пример 1

У библиотеци, ученици размењују књиге за читање као на *слици 1.*

а) Представи релацију R_1: „...позајмио сам књигу од...“ међу ученицима из разреда графом.

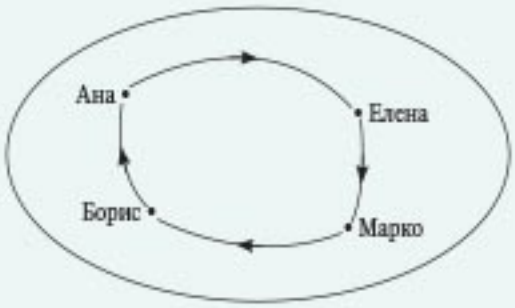
б) Провери да ли је релација рефлексивна, симетрична и транзитивна.

в) Представите релацију R_2: „...може се добити књига низом позајмљивања од...“ међу ученицима помоћу графика (на пример, ако је Ана позајмила књигу од Елене, а Елена позајмила књигу од Марка, онда Марко може добити књигу од Ане низом позајмљивања Ана → Елена → Марко).
Да ли је R_2 релација еквиваленције?



слика 1

а) R_1= {(Ана, Елена), (Елена, Марко), (Марко, Борис), (Борис, Ана)}.
Представљање релације R_1 дато је на *цртежу 1.*



цртеж 1

б) Релацијата R_1:
- није рефлексивна јер, на пример, Ана не може да позајми књигу себи,
- није симетрична јер, на пример, Ана је позајмила књигу Елени, али Елена није позајмила књигу Ани,
- није транзитивна јер, на пример, Ана је позајмила књигу Елени, Елена је позајмила књигу Марку, али Ана није позајмила књигу Марку.

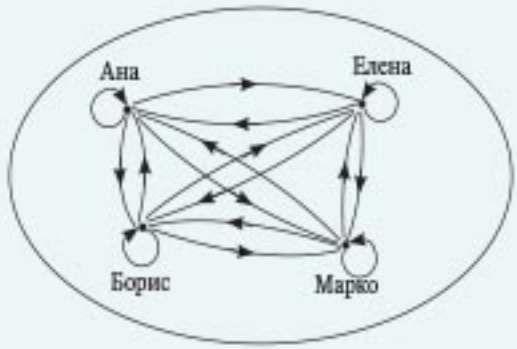
в) Према релацији R_2:
Ана може добити књигу позајмљивањем од:
Ана (Ана → Елена → Марко → Борис → Ана),
Елена (Елена → Марко → Борис → Ана),
Марко (Марко → Борис → Ана),
Борис (Борис → Ана)

Елена може да добије књигу позајмљивањем од:
Елена (Елена → Марко → Борис → Ана → Елена),
Марко (Марко → Борис → Ана → Елена),
Борис (Борис → Ана → Елена),
Ана (Ана → Елена).

Марко може добити књигу кроз низ позајмљивања од:
Марко (Марк → Борис → Ана → Елена → Марко),
Борис (Борис → Ана → Елена → Марко),
Ана (Ана → Елена → Марко), Елена (Елена → Марко).

Борис може добити књигу кроз низ позајмљивања од:
Борис (Борис → Ана → Елена → Марко → Борис),
Ана (Ана → Елена → Марко → Борис),
Елена (Елена → Марко → Борис), Марко (Марко → Борис).

График релације R2 је приказан на *цртежу 2*



цртеж 2

Релација R_2 је:

- рефлексивно, јер сваки ученик може добити књигу у низу од четири позајмљивања, почевши од њега. На пример,
  Ана → Елена → Марк → Борис → Ана;
- симетрично, јер ако један ученик може добити књигу од другог ученика у низу позајмљивања, онда и други ученик може добити књигу од првог ученика у низу позајмљивања. На пример, ако Елена може добити књигу у низу позајмљивања од Бориса, тј. Борис → Ана → Елена, онда Борис може добити књигу у низу позајмљивања од Елене, тј. Елена → Марк → Борис.
- транзитивна, јер ако један може добити књигу у низду позајмљивања од другог студента, а други студент такође може добити књигу у низду позајмљивања од трећег студента, онда први студент може добити књигу у низду позајмљивања од трећег студента. На пример, ако Марко може добити књигу низом позајмљивања од Ане (Ана → Елена → Марко), а Ана може добити књигу низом позајмљивања од Бориса (Борис → Ана), онда Марко може добити књигу низом позајмљивања од Бориса (Борис → Ана → Елена → Марко).

Стога, R2 је релација еквиваленције.

Задатак 1

У школи се организује велики концерт, а ученици једни другима дају задатке за припрему сценографије, музике, светла и промоције. Познато је да: Ана води групу за сценографију и даје задатке Борису и Елени;
Борис води музичку групу и даје задатке Марку и Нини;
Марко води групу за осветљење и даје задатке Петру и Дамјану;
Елена води групу за промоцију и даје задатке Ани и Нини.

а) Представите релацију R_1: „...даје задатак...“, међу ученицима табеларно и графички.
б) Проверите да ли је релација R_1 рефлексивна, симетрична и транзитивна.
в) Проверите да ли је релација R_2
: „...добија задатак кроз низ задатака из...“, рефлексивна, симетрична и транзитивна?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Марко има воду, шећер и со и жели да направи раствор за садњу биљака. Он раствара шећер у води, а затим додаје со.
   а) Представите релацију R: „...раствара се пре...“, између супстанци табеларно и графички.
   б) Проверите да ли је релација R транзитивна и антисиметрична.

2. У лабораторији, ученик загрева воду у три чаше:
   пиво А: од 20°C до 50°C, пиво В: од 30°C до 60°C и пиво С: од 40°C до 80°C.
   а) Представите релацију R: „...има вишу почетну температуру од...“, између чаша табеларно.
   б) Да ли је релација R рефлексивна, симетрична и транзитивна? Објасните свој одговор.

3. Познато је да је планина Водно висока 1011 м, планина Бистра висока 2621 m, а планина Кораб висока 2764 m.
   а) Представите релацију R: „...је виша од...“, између планина табеларно и графички.
   б) Да ли је R релација уређења? Објасните свој одговор.

4. У учионици за рачунарство, ученици Замира, Елена, Марко и Борис размењују датотеке. Познато је да Замира шаље датотеку Елени; Елена шаље датотеку Марку; Марко шаље датотеку Борису.
   а) Представите релацију R: „...шаље датотеку...“, између ученика табеларно и графички.
   б) Да ли је R релација еквиваленције?

5. У школском пројекту о обновљивим изворима, групе су поставиле мале генераторе тако да: соларни панел обезбеђује енергију батерији, батерија обезбеђује енергију мотору, а мотор обезбеђује енергију вентилатору.
   а) Представите релацију R_1: „...преноси енергију на...“, између малих генератора, табеларно и графички.
   б) Одредите нову релацију R_2: „...може утицати у низу преноса на...“, и проверите да ли је то релација еквиваленције.

6. Пројектни задатак
   Применом релација кроз пројекат „Релације у мом граду“ боље ћете се упознати са условима у граду у којем живите и моћи ћете да пронађете начине да их побољшате.

За град у коме живите, одредите скупове: школе, посластичарнице, сендвичарнице, пијаце, складишта, аутобуска стајалишта, паркови и музеји.
Изаберите наведене скупове са највише 5 елемената.

а) Одредите релацију у скупу:
- школе, према броју ученика;
- школе, према нивоу образовања;
- посластичарнице, према броју врста слаткиша у понуди;
- сендвичарнице, према броју врста сендвича у понуди;
- пијаце, према цени врсте брашна које се продаје;
- пијаце, према броју производа у продаји;
- складишта, према запремини складишног простора;
- аутобуска стајалишта, према томе да ли постоји директна линија између њих;
- паркови, према површини;
- музеји, према броју експоната.

б) Представите релације графички и одредите њихова својства. Које од релација су релације еквиваленције, а које су релације уређења?

в) Објасните како својства одређених релација утичу на живот и динамику у граду.

г) Додавањем нових индиректних утицаја, одредите нове релације и представите их графички. Објасните који аспекти градског живота би се побољшали.

д) Преку додавање на нови индиректни влијанија, определи нови релации и претстави ги со граф. Објасни кои аспекти на градскиот живот би биле подобрени.

5. РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Позитивни и негативни рационални броеви

Активност

Селма жели да купи сет од 5 оловака који кошта 22 денара.

а) Колико кошта оловка?

б) Да ли постоји природан број који можемо користити да запишемо цену оловке?

в) Да ли постоји цео број који можемо користити да запишемо цену оловке?

г) Како можемо написати цену оловке?

У скупу природних бројева $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ операције одузимања и дељења нису увек изводљиве. На пример, не постоји природни број који је једнак разлици $3 - 5$.

Увођењем негативних бројева и нуле, проширили смо скуп природних бројева на скуп целих бројева $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ у којима је операција одузимања увек изводљива.

Међутим, операција дељења и даље није увек изводљива у скупу природних бројева. На пример, не постоји природни број који је једнак количнику 3:4.
Да бисмо превазишли проблем дељења у скупу природних бројева, проширили смо га новим бројевима – разломцима.

У том смислу, на пример, прихватамо да је количник 3:4 једнак разломку $\frac{3}{4}$ и дека $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\ldots$

Нови скуп разломака такође садржи природне бројеве, јер сваки природни број може да се запише као разломак са имениоцем 1.

На пример, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $3=\frac{3}{1}$, ...

Било који број записан као разломак $\frac{a}{b}$, каде што $a, b \in \mathbb{N}$, назива се **позитиван рационалан број.**

Скуп свих позитивних рационалних бројева означавамо са $\mathbb{Q}^+$.

Пишемо: $\mathbb{Q}^+=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

На пример, бројеви $\frac{3}{4}$, 5, $\frac{7}{6}$ и $\frac{11}{5}$ су позитивни равионални бројеви.

Задатак 1

Које од следећих тврдњи су тачне: а) $\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+$, б) $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Q}^+$, в) $\mathbb{Z}^+\subseteq\mathbb{Q}^+$, г) $\mathbb{Z}^+=\mathbb{Q}^+$?

Операција дељења није увек изводљива у скупу целих бројева.
На пример, не постоји цео број који је једнак количнику $3:(-4)$.
Да бисмо превазишли проблем дељења у скупу целих бројева, потребно је да га проширимо новим бројевима.
У ту сврху, претпоставићемо да, на пример важи,

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\cdot(-1)}{3\cdot(-1)}=\frac{2}{-3},$$

што значи да разломци $\frac{-2}{3}$ и $\frac{2}{-3}$ представљају један исти број што ћемо означити са $-\frac{2}{3}$,

односо важи $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$.

То значи да, на пример, поред разломка $\frac{2}{3}$ треба да разгледамо и разломак $-\frac{2}{3}$.
Нови скуп разломака такође укључује негативне целе бројеве, јер се сваки од њих може записати као разломак са именоцем 1.
На пример, $-1=\frac{-1}{1}$, $-2=\frac{-2}{1}$, $-3=\frac{-3}{1}$,....

Било који број записан као разломак $-\frac{a}{b}$, где је $a, b \in \mathbb{N}$, назива се **негативан рационалан број**.

Скуп свих негативних рационалних бројева означен је са $\mathbb{Q}^-$.

Пишемо: $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{N}\right\}$.

На пример, бројеви $--, -4, -\frac{5}{3}, -\frac{17}{19}$ су негативни рационални бројеви.

Задача 2

Које од следећих тврдњи су тачне: а) $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Q}^-$, б) $\mathbb{Z}^- \neq \mathbb{Q}^-$, в) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^-$?

Рационални броеви

Унија свих позитивних рационалних бројева, свих негативних рационалних бројева и броја нула назива се **скуп рационалних бројева** и означује се са $\mathbb{Q}$, тј.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$.

Активност

Размотри дијаграм на *цртежу* 1 и објасни однос између скупа природних бројева $\mathbb{N}$, скупа целих бројева $\mathbb{Z}$ и скупа рационалних бројева $\mathbb{Q}$.



цртеж 1

Из једначине $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, где је $a, b \in \mathbb{N}$, закључујемо да сваки рационални број можемо записати у **стандардном облику** $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Према томе, скуп рационалних бројева можемо записати у облику:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$.

Пример 1

У табели су приказане вредности температуре измерене у Скопљу током једног дана:

време	10 h ујутру	12 h подне	3 h поподне	7 h увече	10 h ноћу
температура	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

Колика је сатна промена температуре у сваком временском интервалу?

У интервалу од 10 h ујутру до 12 h у подне, сатна промена температуре је

$$\frac{14\,^{\circ}\mathrm{C}-11\,^{\circ}\mathrm{C}}{2\,\mathrm{h}}=\frac{3}{2}\,\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}.$$

У интервалу од 12 h у подне до 15 часова поподне, сатна промена температуре је

$$\frac{17\,^{\circ}\mathrm{C}-14\,^{\circ}\mathrm{C}}{3\,\mathrm{h}}=1\,\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}.$$

У интервалу од 15 до 19 часова, сатна промена температуре је

$$\frac{10\,^{\circ}\mathrm{C}-17\,^{\circ}\mathrm{C}}{4\,\mathrm{h}}=\frac{-7}{4}\,\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}.$$

У интервалу од 19 до 22 часа, сатна промена температуре је

$$\frac{5\,^{\circ}\mathrm{C}-10\,^{\circ}\mathrm{C}}{3\,\mathrm{h}}=\frac{-5}{3}\,\frac{^{\circ}\mathrm{C}}{\mathrm{h}}.$$

Мерни бројеви промене температуре на сат су рационални бројеви: $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{-7}{4}$ и $\frac{-5}{3}$. Међу њима, позитивни рационални бројеви су $\frac{3}{2}$ и 1, а негативни рационални бројеви су $\frac{-7}{4}$ и $\frac{-5}{3}$. Број 1 је такође и цео и природан број.

Пример 2

Који од рационалних бројева $-4,\ \frac{1}{2},\ -3,\ \frac{-1}{3},\ 2,\ \frac{-3}{7},\ \frac{5}{6},\ 9$ су:

а) позитивни рационални бројеви, б) негативни рационални бројеви,
в) цели бројеви, г) природни бројеви?

а) Позитивни рационални бројеви су $\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{5}{6}$ и 9.

б) Негативни рационални бројеви су $-4, -3,\ \frac{-1}{3}$ и $\frac{-3}{7}$.

в) Цели бројеви су - 4, - 3, 2 и 9. г) Природни бројеви су 2 и 9.

Задатак 3

Дат је скуп $P=\{-1,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 1\frac{1}{2},\ -3,\ -4\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2},\ -\frac{5}{6},\ 8\}$. Запиши скуп:

а) $M=\{x\,|\,x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Z}\}$, б) $M=\{x\,|\,x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Q}^{+}\}$, в) $M=\{x\,|\,x\in P \text{ и } x\in\mathbb{Q}^{-}\}$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Користећи рационалан број, напиши реченицу:

а) Мира дугује 11.000 денара,

б) Соња има 300 перли,

в) данас је температура 4°C испод нуле,

г) јуче је температура била 11°C изнад нуле,

д) ниво воде у Охридском језеру је $\frac{15}{2}$cm cm нижи од нормалног нивоа воде.

2. Која од следећих тврдњи је тачна:

а) $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, б) $8 \in \mathbb{Z}^-$, в) $-55 \in \mathbb{Q}^+$, г) $0 \in \mathbb{Q}$, д) $0 \in \mathbb{Z}$?

3. Запиши скуп:

а) A који се састоји од пет позитивних рационалних бројева,

б) B који се састоји од пет негативних рационалних бројева,

в) C који се састоји од пет рационалних бројева.

4. Лејла каже да је $\frac{5}{3}$ рационалан број, а 5 само природан број.
Сеад каже да су оба рационална броја. Ко је у праву?

5. Препиши и допуни табелу према решеном примеру у првом реду.

	скуп						
број	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^+$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}^-$
$-\frac{1}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
0							
$-\frac{9}{2}$							
7							
-11							

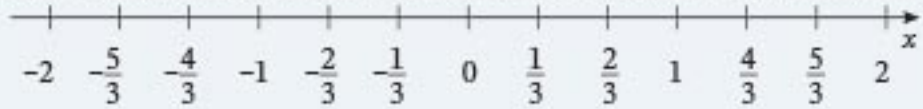
6. Које од следећих тврдњи су тачне:

а) $\mathbb{N} = \mathbb{Q}^+$, б) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, в) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$, г) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\} = \mathbb{Q}$,

д) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \varnothing$, ђ) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$, е) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, ж) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$

Истраживање

1. На *цртежу* 2 приказано је неколико рационалних бројева на бројевној оси.



цртеж 2

а) Подсети се правила за приказивање целих бројева на бројевној осиј. Према сличном правилу, и рационалне бројеве представљамо на бројевној оси.
Покушај да објасниш правило за представљање рационалних бројева на бројевној оси.
Који рационални бројеви су представљени десно од нуле, а који лево од нуле?

б) Нацртај бројевну осу и изабери 6 рационалних бројева, 3 позитивна и 3 негативна рационална броја.

2. а) Подсети се правила за упоређивање целих бројева помоћу бројевне осе. Покушај да објасниш правило за упоређивање рационалних бројева помоћу бројевне осе.

б) Подсети се да за позитивне рационалне бројеве важи:

$\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$ јер $2 \cdot 5 < 3 \cdot 4$; $\frac{7}{6} > \frac{4}{9}$ јер $7 \cdot 9 > 4 \cdot 6$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ јер $3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$.

Према истом правилу, упореди бројеве:

$\frac{-2}{3}$ и $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$ и $\frac{-4}{5}$; $\frac{-4}{5}$ и $\frac{-4}{5}$, $\frac{-2}{3}$ и $\frac{-4}{6}$.

Затим провери свој одговор користећи бројевну осу.

в) Изведи опште правило за упоређивање рационалних бројева записаних у стандардном облику.

6. БЕСКОНАЧНИ ПЕРИОДИЧНИ ДЕЦИМАЛНИ БРОЈЕВИ

Подсетимо се да се сваки разломак може записати као децимални број налажењем количника бројиоца и имениоца.

Активност

Напиши обојени део круга:

а) као разломак, б) као децимални број.



Пример 1

Запиши разломак као децимални број: а) $\frac{3}{4}$, б) $\frac{1}{3}$.

а) $\frac{3}{4} = 0,75$ Када се дељење заврши, добијамо **коначни децимални број**.

б) $\frac{1}{3} = 0,333...$ Када се дељење не завршава, добијамо **бесконачно периодични децимални број** или скраћено **периодични децимални број**.

• Периодични децимални број у коме се одмах после децималног зареза налази коначан низ цифара које се понављају истим редоследом назива се **чисто периодични децимални број**.
• Периодични децимални број у коме се после неколико децимала различитих од нуле налази коначан низ цифара које се понављају истим редоследом назива се **мешовити периодични децимални број**.
• Низ цифара који се понавља назива се **период децималног броја**.

Коначни децимални бројеви су, на пример, бројеви: 2,65 и 36,567834.
Број 0,333333333333333... = 0,(3) је чисто периодични децимални број са периодом 3.
Број 2,3(27) = 2,3272727272727... је мешовити периодични децимални број са периодом 27.

Задатак 1

Запиши разломак као децимални број: а) $\frac{1}{5}$, б) $\frac{11}{37}$.

Који од добијених децималних бројева је коначан децимални број, а који је бесконачан децимални број? Колики је период бесконачног децималног броја?

Пример 2

Запиши децимални број као разломак: а) 0,25; б) 0,(16); в) 2,36(4).

а) Број 0,25 је коначан децимални број. Може се записати као децимални разломак:

$$x = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

б) Број 0,(16) је чисто периодични децимални број са периодом 16. Може се записати као разломак следећим поступком:

$0,(16) = x$	Непознати разломак означавамо са x.
$0,(16) \cdot 100 = x \cdot 100$	Период је двоцифрени број, па зато
$16,(16) = x \cdot 100$	обе стране множимо са 100.
$16 + 0,(16) = x \cdot 100$	Децимални број записујемо као збир целог броја и датог децималног броја.
$16 + x = x \cdot 100$	Замењујемо 0,(16) са x и решавамо линеарну једначину непознате x.
$16 = x \cdot 100 - x$	
$16 = x(100 - 1)$	
$x = \frac{16}{100-1} = \frac{16}{99}$.	Његово решење је $x = \frac{16}{99}$.

Сходно томе, добијамо да је $0,(16) = \frac{16}{99}$.

в) Број 2,36(4) је мешовити периодичан децимални број. Може се записати као разломак на следећи начин:

$2,36(4) = x$ Непознати разломак означимо са x.

$236,(4) = 100 \cdot x$ Понављање почиње после друге децимале, па обе стране множимо са 100.

$2364,(4) = 1000 \cdot x$ Постоје 3 цифре пре почетка периода децималног броја, па множимо обе стране једначине $2,364,(4) = x$ са 1000

Одузимамо обе једначине.

$2364,(4) - 236,(4) = 1000 \cdot x - 100 \cdot x$

$2128 = 900 \cdot x$

$x = \frac{2128}{900} = \frac{532}{225} = 2\frac{82}{225}$.

Према томе, добијамо да $2,36(4) = 2\frac{82}{225}$.

Задатак 2

Запиши децимални број као разломак: а) 0,75; б) 0,(6); в) 2,1(45).

Задатак 3

На бициклистичкој рути „Зелени прстен“, рута се састоји од три деонице: деоница A дужине 0,6 km, деоница B дужине 1,23 km и деоница C дужине 2,45 km.

а) Напиши дужине као разломке.

б) Колика је дужина целе трасе?

в) Марко је направио 3 круга, а затим је прешао деоницу A. Колико километара је Марко прешао?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Напиши следећи разломак као децимални број: а) $\frac{2}{3}$, б) $\frac{1}{2}$, в) $\frac{9}{20}$, г) $\frac{77}{390}$, д) $\frac{77}{330}$.
2. Користећи ознаку за период децималнг броја, напиши број:
   а) 0,3989898..., б) 4,7102102..., в) 0,2540314031..., г) 243,2526161....
3. Нађи период децималног броја записаног као разломак: а) $\frac{7}{9}$, б) $\frac{42}{37}$, в) $\frac{118}{123}$.
4. Напиши периодични децимални број као разломак:
   а) 0,(7); б) 3,(21); в) 1,2(34); г) 4,3(123); д) 5,12(7).
5. Да би се поставио шатор, исеку се три конопца дужине 0,(8)m, 2,3(5) m и 3,(27)m.
   а) Изрази дужину сваког конопца као разломак.
   б) Митко је имао конопац дужине 10 m. Колико метара конопца ће му остати после сечења?
6. Аутомобил је прешао пут дуг 1 km. Први део пута, дуг 0,4 km, аутомобил је прешао просечном брзином од 0,(833) km/h Други део пута, дуг 0,6 km, аутомобил је прешао брзином од 1,2(5) km/h.
   а) Напиши мерни број сваке од брзина као разломак.
   б) Колико је времена у часовима било потребно да се пређе сваки део пута?

7. ЈЕДНАКОСТ РАЗЛОМАКА, ДЕЦИМАЛНИХ БРОЈЕВА И ПРОЦЕНАТА

Активност

Ана је појела парче чоколаде. Борјан каже да је Ана појела $\frac{1}{2}$ чоколаде, Мерита каже да је појела 0,5 чоколаде, а Суад каже да је појео 50% чоколаде. Да ли су Борјан, Мерита и Суад, на различите начине, изразили исти део чоколаде који је Ана појела? Објасни свој одговор.

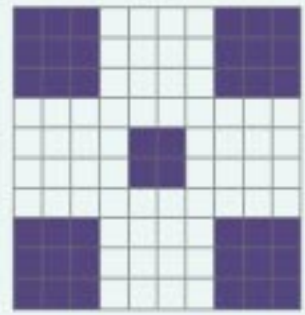
Пример 1

Обојени део квадрата може се описати на три начина:

$\frac{40}{100}$ квадрата,

0,4 квадрата,

40% квадрата.



цртеж 1

Пример 2

Изрази у процентима следеће разломке: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{3}{8}$, в) $\frac{1}{3}$.

а) $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$, б) $\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=\frac{300}{8}\%=37,5\%$, в) $\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\cdot 100\right)\%\approx 33,3\%$.

Пример 3

Изрази у процентима следеће децималне бројеве: а) 0,42; б) 3,6; в) 0,054.

а) $0,42=(0,42\cdot 100)\%=42\%$, б) $3,6=(3,6\cdot 100)\%=360\%$,
в) $0,054=(0,054\cdot 100)\%=5,4\%$

Број или разломак се изражава као проценат када се прво помножи са 100, а затим се поред добијеног производа напише знак „%“ за проценат.

Пример 4

Изрази проценте као разломке: а) 37%, б) 18%, в) 56%.

а) $37\% = \frac{37}{100}$, б) $18\% = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$, в) $56\% = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$.

Пример 5

Изрази проценте као децималне бројеве: а) 8%, б) 70%, в) 35%.

а) $8\% = \frac{8}{100} = 0{,}08$; б) $70\% = \frac{70}{100} = 0{,}7$; в) $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$.

Проценти се изражавају као број, када се број процената подели са 100 и изостави знак „%“ за проценат.

Пример 6

Изрази као проценат део правоугаоника на *цртежу 2* обојен зеленом бојом.

$\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5} \cdot 100\right)\% = 80\%$ од правоугаоника је обојено зеленом бојом.

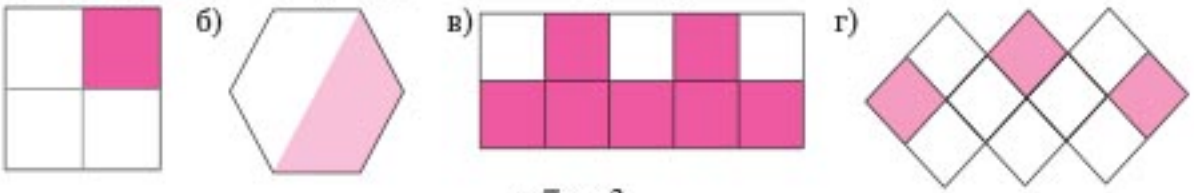


цртеж 2

Задатак 2

Изрази у процентима обојени део облика на *цртежу 3*:

а) б) в) г)



цртеж 3

Пример 7

Марија је у ресторану наручила пицу подељену на 8 комада. Појела је 3 комада, а њена другарица Арта је појела 1 комад. Запиши као разломак и као проценат део пице:
а) који је Марија појела, б) који је Арта појела, в) који је остао непоједен.

а) Марија је појела $\frac{3}{8}$ комада пице, или 37,5% пице, јер је $\frac{3}{8}=\left(\frac{3}{8}\cdot 100\right)\%=37{,}5\%$.

б) Арта је појела $\frac{1}{8}$ пице, односно12,5 % пице јер је $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{8}\cdot 100\right)\%=12{,}5\%$.

в) Део пице који је остао непоједен је $\frac{1}{2}$ пице, односно 50% пице, јер је

$1-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\cdot 100\right)\%=50\%$.

Пример 8

Мина жели да купи воће за целу недељу. У продавници су приказане цене:
јабуке: $\frac{1}{2}$ kg за 30 денара, банане: 0,75 kg за 45 денара, поморанџе: 40% kg за 24 денара.

а) Израчунај цену по килограму за свако воће.

б) Направи табелу у којој ћеш представити свако воће са њиховим количинама у облику разломка, децималног броја и процента, и цене по килограму.

в) Мина има 90 денара. Шта може да купи да би искористола цео буџет?

а) Ако $\frac{1}{2}$ kg јабука кошта 30 денара, онда ће 1 kg коштати $30:\frac{1}{2}=30\cdot 2=60$ денара.

Ако 0,75 kg банана кошта 45 денара, онда ће 1 kg коштати $45:0{,}75=60$ денара.
Ако 0,4 кг поморанџи кошта 24 денара, онда ће 1 кг коштати $24:0{,}4=60$ денара

б)

воће	разломак	децимални број	проценат	цена за 1 kg
јабуке	$\frac{1}{2}$	0,5	50%	60 денара
банане	$\frac{3}{4}$	0,75	75%	60 денара
поморанџе	$\frac{2}{5}$	0,4	40%	60 денара

в) Сво воће има исту цену по килограму. Мина може да комбинује различите врсте воћа масе од 1,5 kg да би искористила цео буџет.

Задатак 3

У школској кухињи ученици купују сокове. Андреј је попио $\frac{3}{5}$ литра сока од поморанџе, Бела 0,6 литра сока од јабуке, а Вања 60% литра сока од грејпфрута.

а) Направи табелу у којој ћеш забележити сваку количину попијеног сока као разломак, децимални број и проценат.

б) Колико милилитара сока је сваки ђак попио?

в) Који ђак је попио највише сока, а који најмање?

г) Користећи табелу, напиши кратак закључак

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Прецртај и попуни табелу:

проценат	42%				12%
децимални број		0,65		0,07	
разломак			$\frac{17}{20}$		

2. На математичком такмичењу, један ђак је решио $\frac{2}{5}$ задатака.

а) Изрази разломак $\frac{2}{5}$ као децимални број.

б) Изрази исти разломак као проценат.

в) Да ли 0,4 и 40% одређују исте количине као $\frac{2}{5}$? Објасни свој одговор.

г) Ако је други ученик решио 75% задатака, који је одговарајући разломак и децимални број?

3. Јусуф је у продавници купио $\frac{2}{3}$ kg јабука, Марко је купио 0,5 kg банана, а Ана је купила 80% једног килограма поморанџи. Која врста воћа је била највећа купљена количина?

4. Богдан је трчао 3 дана истом стазом. Првог дана је претрчао 0,6 од стазе, другог дана је претрчао $\frac{5}{8}$ стазе, и трећег ана претрчао је 55 % стазе.
Ког дана је претрчао највећи део стазе ?

5. Софија, Дамјан и Арбнора су имали исти износ новца.
Уложили су новац у инвестициони фонд.
Софија је уложила 0,75 свог износа,
Дамјан је уложио $\frac{5}{8}$ свог износа, а Арбнора је уложила 70% свог износа.
Који ученик је уложио највише?

Скенирај код и реши задатке.

6. Ученици праве глинене моделе. Мелита је завршила $\frac{9}{20}$ свог модела, Ања је завршила 0,45% свог модела, а Марко је завршио 50% свог модела.
Процени ко је направио највећи део модела и предложи како би могли да споје три модела у један да би добили комплетан модел.

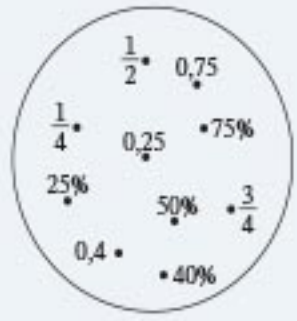
Истраживање

Прецртај дијаграм на слици 4 у свеску.

а) Повежи разломак, децимални број и проценат који изражава исту количину.

б) Да ли релација R:„...представља исту количину као што је ...“ дефинисана у скупу, представљена дијаграмом рефлексивна, симетрична и транзитивна?

в) Да ли је релација R релација еквиваленције?



цртеж 4

8. ИЗРАЧУНАВАЊЕ РАЗЛОМАКА И ПРОЦЕНАТА КОЛИЧИНА

Активност

У кутији се налази 100 бомбона. 25% су црвене, 50% су плаве, а остале су жуте.

а) Колико црвених, колико плавих и колико жутих бомбона има у кутији?

б) Колики део бомбона од укупног броја су жуте? Изрази део жутих бомбона као разломак и као проценат.

в) Ако појеш 50% свих бомбона, колико ће их остати?

Пример 1

У школској библиотеци је купљено 120 књига. Од њих, је 40% научна фантастика, $\frac{1}{4}$ су романи, а преостали део књига су других категорија.

а) Колико књига је из области научне фантастике? б) Колико књига су романи?

в) Изрази преостале књиге као разломак и као проценат од укупног броја књига.

г) Која категорија има највише књига, а која најмање?

а) Научна литература је 40% од 120 књига, тј. $0{,}4 \cdot 120 = 48$ књига.

б) $\frac{1}{4}$ од 120 књига су романи, односно $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$ књига.

в) Од осталих категорија, има $120 - (48 + 30) = 120 - 78 = 42$ књиге.

Као разломак од 120 књига, преостале категорије су $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$.

Као проценат од 120 књига, преостале категорије су $\frac{42}{120} \cdot 100 = 35\%$.

г)

категорија	број књига	разломак	проценат
научна литература	48	$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$	40%
романи	30	$\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$	25%
остало	42	$\frac{7}{20}$	35%

Највише књига је научна литература: 48 књига или 40% од укупног броја књига. Најмање има романа: 30 књига или 25% од укупног броја књига. Преостале категорије чине 42 књиге или 35% укупног броја књига.

Задатак 1

У школском спортском клубу се набавља нова спортска опрема. Укупно је набављено 150 реквизита, од којих су $\frac{1}{3}$ лопте за фудбал, 20% су тениски рекети, а остали део су конопци за вежбање.

а) Колико је фудбалских лопти набављено?
б) Колико је тениских рекета набављено?
в) Изрази број конопаца као разломак и као проценат од укупне количине.
г) Упореди која категорија опреме је највише, а која најмање заступљена.
д) Уколико се дода још 10 конопаца, да ли ће се проценат конопаца повећати или смањити? Објасни свој одговор.

Пример 2

У лабораторији се припрема водени раствор шећера на собној температури. У 300 ml воде се раствори 100 g шећера. Затим се дода још 200 g шећера, који се потпуно раствори.
а) Који део масе почетног раствора представља шећер?
б) Колики је проценат шећера у почетном раствору?
в) Колики је нови проценат шећера након додавања још 200 g шећера?
г) Да ли се концентрација повећала и за колико процената?

а) Под претпоставком да је 1 ml воде ≈ 1 g воде, шећер представља
$\frac{100\text{ g}}{(300\text{ g}+100\text{ g})}=\frac{100\text{ g}}{400\text{ g}}=\frac{1}{4}$ од почетног раствора.
б) Проценат шећера у почетном раствору је
$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%$.
в) Након додавања 200 г шећера, шећер представља
$\frac{100\text{g}+200\text{g}}{400\text{g}+200\text{g}}=\frac{300\text{g}}{600\text{g}}=\frac{1}{2}$ од новог раствора.
Проценат шећера у новом раствору је
$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 50}{2\cdot 50}=50\%$.
г) Концентрација шећера у раствору се повећала за
$50\%-25\%=25\%$
што је и очекивано, пошто се количина шећера повећала, а количина воде је остала иста.

Задатак 2

У школској лабораторији се испитује састав ћелија алги. У једном узорку има 600 ћелија. Од којих су $\frac{2}{3}$ ћелије зелених алги, 20% су ћелије црвених алги и остатак су ћелије из других врста алги.
а) Колико ћелија је из зелених алги?
б) Колико ћелија је из црвених алги?
в) Колико ћелија је из других врста алги? Изрази њихов број као разломак и проценат од укупног броја ћелија.
г) Упореди која категорија ћелија алги је највише заступљена, а која најмање.
д) Ако се број ћелија црвених алги повећа за 30 ћелија, колико ће се променити проценат ћелија црвених алги?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. У школској мензи се припрема укупно 200 порција за ручак. $\frac{3}{8}$ од порција је за вегетаријанце, 30% порција је без глутена и нису вегетаријанске, а остатак су редовне порције.
   а) Колико је вегетаријанских порција?
   б) Колико порција је без глутена?
   в) Колико је редовних порција? Изрази њихов број као разломак и као проценат од укупног броја порција.
   г) Која врста порција је највише заступљена, а која је најмање?
   е) Ако се припреми још 20 редовних порција, како ће се променити проценат редовних порција?

2. У продавници је Петар купио три артикла. Први је коштао 1.200 денара са попустом од 15%, други је коштао 850 денара са попустом од 20%, а трећи је коштао 600 денара са попустом од 10%.
   а) Израчунај колико ће Петар платити за сваки артикал после попуста.
   б) Колико ће денара укупно уштедети после попуста?
   в) Изрази проценат укупне цене сваког артикла после попуста

3. У школи има 240 ученика, који су подељени у групе за пројекат. $\frac{1}{3}$ ученика су у групи за истраживање животне средине, 25% је у групи за рачунарство, а остали су у групи за физику.
   а) Колико ученика има у свакој групи?
   б) Изрази број ученика у свакој групи као проценат од укупног броја ученика.
   в) Упореди групе и одреди која има највише, а која најмање ученика.

4. У експерименту из хемије, прави се раствор. 90 g шећера растворено је у 750 ml воде. Затим се додаје још 60 g шећера.
   а) Израчунај проценат шећера у раствору пре додавања.
   б) Израчунај нови проценат шећера после додавања шећера.
   в) Изрази разломком повећање шећера као део почетног раствора.

5. У спортском клубу се набавља 180 реквизита. $\frac{2}{5}$ реквизита су фудбалске лопте, 30% су кошаркашке лопте, а остало су тениски рекети.
   а) Колико реквизита има свака категорија реквизита?
   б) Изрази број реквизита као разломак и проценат од укупног броја реквизита.
   в) Ако се прода 10 фудбалских лопти, како ће то утицати на проценат фудбалских лопти?

Скенирај код и реши задатке.

6. У истраживању једног језера било је 600 риба. $\frac{1}{4}$ су биле црвеноперке а 150 су били шарани, остатак су чиниле друге врсте риба.
   а) Колико риба припада другим врстама? Изрази као разломак део других врста риба у односу на све рибе у језеру.
   б) Изрази као проценат број риба у свакој категорији.
   в) Која категорија риба је најбројнија у језеру? Да ли су бројније црвеноперке или шарани?

9. ПРИМЕНА ПРОЦЕНАТА

Активност

У једној продавници се продају следећи производи: пегла за 1200 денара, телевизор за 32000 денара, лап-топ за 78000 денара и микроталасна пећница за 4000 денара.
Ове цене су порасле за 20%.

а) За колико денара је порасла цена сваког производа?

б) Колика је цена сваког производа након повећања?

Пример 1

У тржном центру, јакна кошта 3600 денара. Прво је због акције снижена за 25% , а затим је нова цена повећана за 10% због додавања ПДВ-а.
а) Колико кошта јакна после снижења?
б) Колико ће коштати након повећања претходно снижене цене?
в) Ако Мила има 3000 денара, да ли ће моћи да купи јакну? Објасни свој одговор.

а) Снижење цене јакне је 25% од 3600 денара и износи

$25\% \cdot 3600 = \frac{25}{100} \cdot 3600 = 900$ денара.

Нова цена јакне је 3600 – 900 = 2700 денара.

До нове цене јакне можемо доћи израчунавањем 100% – 25%=75% од цене јакне:

$75\% \cdot 3600 = \frac{75}{100} \cdot 3600 = 2700$ денара.

б) Повећање нове цене од 10%, због додавања ПДВ-а, износи 10% од 2700 и износи

$10\% \cdot 2700 = \frac{10}{100} \cdot 2700 = 270$ денара.

Цена јакне са ПДВ-ом је 2700 + 270 = 2970 денара.

в) Мила има 3000 денара. Зато јер је
3000 – 2970 = 30 денара,
Мила ће моћи да купи јакну и остаће јој 30 денара.

Задатак 1

Породица Петров је у јануару платила рачун за струју од 4800 денара. У фебруару је потрошња смањена за 15% због штедње, али је због повећања цене струје, рачун за март повећан за 20%.
а) Колики је рачун за фебруар?
б) Колики је рачун за март (након повећања)?
в) За колико денара је мартовски рачун већи у односу на јануарски рачун?

Пример 2

Лабораторијска посуда садржи 500 g воде. Због загревања, 12% воде је испарило током експеримента. Затим се у посуду додаје 100 g соли и меша док се не раствори.

а) Колика је нова маса воде након испаравања?

б) Колика је укупна маса раствора након додавања соли?

а) а) Маса испарене воде је 12% од 500 и износи

$$12\% \cdot 500 = \frac{12}{100} \cdot 500 = 60 \text{ грама}$$

Нова маса воде је $500 - 60 = 440$ g.

б) Укупна маса раствора је

440 g (вода) $+ 100$ g (со) $= 540$ g.

Задатак 2

У петријевој посуди се гаји колонија бактерија која на почетку има 250000 бактерија. После 6 сати, број бактерија се повећао за 40%. После додатних 6 сати, број бактерија се повећао за још 25%.

а) Колики је број бактерија после првих 6 сати?

б) Колики је број бактерија после укупно 12 сати?

в) За колико процената се укупно повећала колонија у односу на почетни број бактерија?



ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. У једној продавници, цена лаптопа износи 48000 денара. У периоду акцијског снижења, цена је прво снижена за 15%, а затим за додатних 10% од нове цене.
   а) Колика је коначна цена лаптопа?
   б) Да ли је попуст исти као и једноставно умањивање за 25%?

2. У акваријуму је било 120 риба. После неколико месеци, број риба се повећао за 35%. Затим, је 20% новог броја риба угинуло због недостатка кисеоника у акваријуму. Колико је на крају било риба у акваријуму?

3. Једно језеро има запремину од 50000000 m^3 воде. За време суше, ниво воде се смањује за 12%. Следеће године, падавине повећавају количину воде за 8% од нове запремине. Колика је запремина језера након ових промена?

4. У лабораторији се припрема раствор са 800 g воде и 200 g соли. Затим испарава 10% воде. Колика је нова маса раствора и колика је процентуална концентрација соли након испаравања?

5. Једно USB има капацитет од 64 GB. У њему су сачуване датотеке које заузимају 75% простора. Од тих података, ученик је обрисао 20% да би ослободио простор. Колико GB меморије је слободно након брисања?

6. Ако се цена производа прво повећа за 10%, а затим смањи за 10%, да ли је коначна цена иста као почетна цена? Објасни свој одговор.

10. РАЗМЕР

Упрошћавање размера

Активност

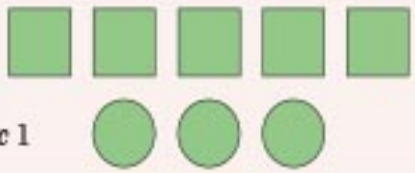
Према цртежу 1, запишите количник:

а) броја кругова и броја квадрата,

б) броја квадрата и броја кругова.

Како се зову и шта показују количници које си записао?

Скенирај код и подсети се размере.



цртеж 1

Подсетимо се да се количник $a : b$ мерених бројева две идентичне величине, које су мерене у истој јединици мере, назива **размер** те две величине.
Бројеви a и b називају се **чланови** размера. Запис $a : b$ читамо као „a према b“.

Пример 1

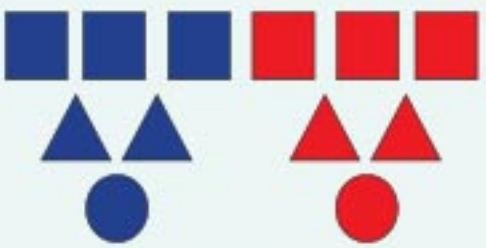
Дате размере запиши у скраћеном облику као један размер.
а) 4 : 9 и 9 : 5, б) 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 и 8 : 3.

а) Из размера 4 : 9 и 9 : 5 произилази скраћени запис 4 : 9 : 5, који називамо размер. Састављен је од три члана и чита се као „4 према 9 према 5“.
б) Размером 7 : 2, 2 : 9, 9 : 8 и 8 : 3 одређује се размер 7 : 2 : 9 : 8 : 3, која има пет чланова.

Пример 2

Према *цртежу 2*, запиши размер:
а) троуглова и квадрата,
б) кругова и троуглова и квадрата.

а) Размер троуглова и квадрата је 4 : 6.
То значи да за свака **4 троугла има 6 квадрата.** Можемо да видимо да за свака **2 троугла има 3 квадрата,** тако да размер 4 : 6 може да се упрости на размер 2 : 3. Пишемо 4 : 6 = 2 : 3 у смислу да два размера одређују исти однос.



цртеж 2

Из размера 4 : 6 добијамо размер 2 : 3, када се сваки његов члан подели са НЗД (4, 6) = 2. Чланови размера 2 : 3 су међусобно прости природни бројеви, односно НЗД (2, 3) = 1, и не може се даље упрошћавати.

б) Размер кругова према троугловима и квадратима је 2 : 4 : 6.

Значи, **за свака 2 круга има 4 троугла и за свака 4 троугла има 6 квадрата.** Можемо да видимо да **за сваки 1 круг постоје 2 троугла и за свака 2 троугла постоје 3 квадрата**, тако да се размер 2 : 4 : 6 може упростити на размер 1 : 2 : 3.

Пишемо 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3, што значи да оба размера одређује исти однос.

Из размера 2 : 4 : 6 добија се 1 : 2 : 3, када се сваки њен члан подели са НЗД (2, 4, 6) = 2. За размер 1 : 2 : 3 важи НЗД (1, 2, 3) = 1 и не може се даље упрошћавати.

Пример 3

Упрости размер:

а) 3 : 18 : 6 : 30, б) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, в) 1,25 : 0,5 : 2,75, г) 45% : 52% : 17%, д) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm.

а) $3 : 18 : 6 : 30 = 1 : 6 : 2 : 10$ Сваки члан делимо са НЗД (3, 18, 6, 30) = 3.

б) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \left(12 \cdot \frac{1}{2}\right) : \left(12 \cdot \frac{2}{3}\right) : \left(12 \cdot \frac{3}{4}\right)$ Сваки члан делимо са НЗС (2, 3, 4) = 12.

$= 6 : 8 : 9$

в) $1{,}25 : 0{,}5 : 2{,}75 = 125 : 50 : 275$ Сваки члан множимо са 100 (декадном јединицом са толико нула колико има децимални број са највише децималних места).

$= 5 : 2 : 11$

г) $45\% : 52\% : 17\% = \frac{45}{100} : \frac{52}{100} : \frac{17}{100}$ Проценте записујемо разломком.

$= 45 : 52 : 17$

д) 25 cm : 0,1 m : 0,3 dm = 25 cm : 10 cm : 3 cm Дужине изражавамо у **истој јединици**.

= 25 : 10 : 3

Задатак 1

Упрости размер а) 36% : 0,6 : 6, б) 0,5 kg : 250 g : 1,25 kg.

Задатак 2

Комшије Ас и Мирсад помешали су плаву, жуту и белу боју да би офарбали своје ограде. Ас је помешао: 2,4 l плаве, 4 l жуте и 1,6 l беле боје.

Мирсад је помешао: 1,8 l плаве, 3 l жуте и 1,2 l беле боје. Да ли су добили исту количину растворене боје? Да ли су добили исту нијансу зелене?

Упутство: Запиши размер којим су Ас и Мирсад помешали боје, а затим га упрости.

Дељење количине у датом размеру

Када се количина подели на два или више делова у датом размеру, можемо сазнати колико количине садржи сваки део.

Активност

Пријатељице Ива и Марија су поделиле рођенданску торту у размеру 2 : 3.



а) Ако је Ива добила 2 парчета, колико парчета је добила Марија?

б) На колико једнаких парчета је исечена торта да би се поделила пријатељицама?

Пример 1

Износ од 250 денара подељен је између Луке, Илине и Сеада у размеру 3:5:2. Колико је денара свако од њих добио?

За сваке 3 акције које Лука добије, Илина добија 5 акција, а Сеад добија 2 акције.
Имамо укупно

$3 + 5 + 2 = 10$ акција.

Износ од 250 денара ћемо поделити са 10 да бисмо пронашли вредност 1 дела:

$250 : 10 = 25$ денара.

Један део има вредност од 25 денара.
Лука је добио $3 \cdot 25 = 75$ денара, Илина је добила $5 \cdot 25 = 125$ денара,
а Сеад је добио $2 \cdot 25 = 50$ денара.

Задатак 1

Подели: а) 48 бомбона у размеру 1 : 2 : 3, б) 440 метара у размеру 6 : 3 : 1.

Пример 2

Аутопут дуг 140 km подељен је на деонице у размеру 2 : 5 : 3 : 4. Колико километара има свака деоница?

Прва деоница се састоји од 2 дела, друга деоница од 5 дела, трећа деоница од 3 дела и четврта деоница од 4 дела. Укупно имамо

$2 + 5 + 3 + 4 = 14$ дела.

Дужина аутопута од 140 km биће подељена са 14 да би се добила дужина 1деонице:

$140 : 14 = 10$ km.

Једна деоница има дужину од 10 km. Сходно томе: прва деоница је дугачка $2 \cdot 10 = 20$ km, друга деоница је дугачка $5 \cdot 10 = 50$ km, трећа деоница је дугачка $3 \cdot 10 = 30$ km и четврта деоница је дугачка $4 \cdot 10 = 40$ km.

Задатак 2

У кошаркашкој утакмици, тим А победио је тим Б резултатом 72:48. Број постигнутих поена по играчу дат је у табели:

Екипа А

играч	број постигнутих поена
Мирко	8
Сенад	16
Филип	22
Менсур	18
Иван	8

Екипа Б

играч	број постигнутих поена
Бесим	6
Саво	18
Фатмир	4
Илија	12
Марио	8

Организатор је поделио:

а) 20 ваучера за спортску опрему тимовима, према броју освојених поена.
По колико ваучера је добио сваки тим?

б) 60 ваучера за посету спортских догађаја играчима, према броју освојених поена.
Колико ваучера је добио сваки играч?

Пример 3

Атлетичари Борис, Ана и Халил су трчали кругове на атлетској стази. Број кругова Бориса према броју кругова Ане према броју кругова Халила био је у размеру 2 : 3 : 4. Познато је да је Борис истрчао 24 круга.
Колико кругова је истрчала Ана, а колико Халил? Колико кругова су атлетичари истрчали заједно?

Борис је трчао 24 круга, што представља 2 дела од укупног броја кругова. Дакле, 1 део кругова је 12 кругова. Ана је истрчала $3 \cdot 12 = 36$ кругова, а Халил $4 \cdot 12 = 48$ кругова. Спортисти су укупно истрчали $24 + 36 + 48 = 108$ кругова.

Задатак 3

Лара је направила колач у коме је однос брашна, шећера и воћа 8:4:2. Лина има 400 g брашна и хоће да направи колач истог укуса.
Колико грама шећера Лина треба да употреби за свој колач? Колико грама воћа треба да употреби?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Упрости размер:

а) 96 : 60 : 120 : 36, б) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} : \frac{1}{6} : \frac{7}{8}$, в) 1,6 : 6,4 : 4 : 2,4.

2. Упрости размер:
   а) 1800 g : 3 kg : 60 dag, б) 450 mm : 75 cm : 1,5 m : 1 m, в) 3 km : 150 m : 450 m,
   г) 25 cm : 1 m : 1,5 dm, д) 120 минути : 4 часа : 2,5 часа, ѓ) 900 m*l* : 4,5 *l* : 13,5 d*l*.

3. Декоративна трака се састоји од три дела. Први део је дугачак 1,2 m, други део је дугачак 80 cm, а трећи део је дугачак 450 mm. Запиши и упрости размер који одговара дужинама делова декоративне траке.

4. Подели у датом размеру:
   а) 780 kg у размеру 2 : 7 : 4, б) 2520 m у размеру 5 : 8 : 7,
   в) 3600 h у размеру 2 : 8 : 5 : 3, г) 680 денара у размеру 8 : 3 : 2 : 4.

5. Унутрашњи углови троугла су у размеру 4 : 3 : 5. Израчунај величину унутрашњих углова троугла.

6. Мерсиха, Еце и Теа живе у изнајмљеном стану. Они деле станарину у размеру 1 : 2 : 2, адекватно на величину соба. Укупна кирија износу 16200 денара месечно. Колики износ треба да плати свака од њих?

7. У једној школи постоје четири секције: литературна (л), математичка (м), информатичка (и) и спортска (с). У математичком одељењу има двоструко више ученика него у књижевном одељењу. У информатичкој секцији има пет пута више ученика него у математичкој.
   Број ученика у информационој секцији је упола мањи од броја чланова у спортском одељењу. Сваки ученик може да чланује у највише једној секцији.
   а) Напишите размер л : м : и : с.
   б) Колико ученика има у свакој секцији, ако у њима има укупно 132 ученика.Упутство: Означи број ученика у секцији за књижевност са x, а затим изрази број ученика у сваком од осталих секција са x.

8. Ученици Душко, Максим и Марија су поделили новац који су зарадили у односу 3 : 4 : 5, равномерно. Душко је добио 4500 денара. Колико су денара добили Максим и Марија? Колики је укупан износ који су ученици зарадили?

Истраживање

Сума коју су имале Амира, Бобан и Калина је била у размеру 6 : 5 : 4, сразмерно. Када је једна девојчица позајмила 20 денара Бобану, суме су биле у размеру 5 : 6 : 4.
а) Колико новаца је имао свако од њих пре позајмљивања?
б) Да ли је могуће да је Каролина позајмила новац од Бобана? Образложи одговор.

11. ПРОПОРЦИОНАЛНЕ ВЕЛИЧИНЕ

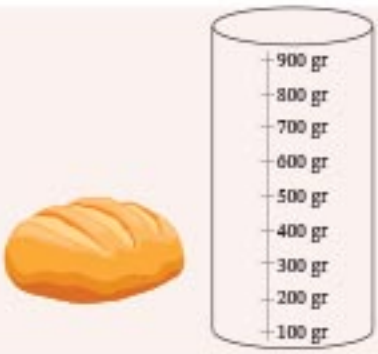
Правопропорционалне величине

Активност

За припрему 3 векне хлеба пекар је потрошио 720 gr брашна.

а) Колико брашна ће му бити потребно за 6 векни хлеба, а колико за 9 векни хлеба?

б) Како се мења потребна количина брашна повећањем броја векни хлеба, а како смањењем броја векни хлеба?



За две величине кажемо да су **правопропорционалне** ако се повећањем једне величине повећава и друга величина у истом односу.

Другим речима, две величине су правопропорционалне ако се једна величина повећа за исто онолико пута за колико се повећа и друга величина, односно колико пута се умањује једна величина толико пута се умањује и друга величина.

Пример 1

Две свеске коштају 160 денара.

а) Ако купимо три пута више свезака колико новаца ћемо потрошити?

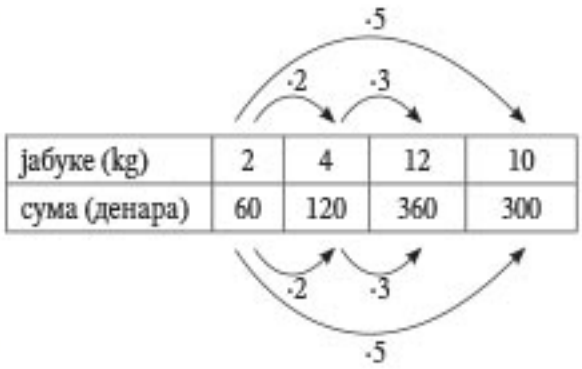
б) Каква је веза између количине, броја свезака, и новца који морамо да платимо за свеске?

а) Ако купимо три пута више свезака, платићемо три пута више. Три пута више свезака је 6 свезака. Платићемо три пута више за њих, то јест,

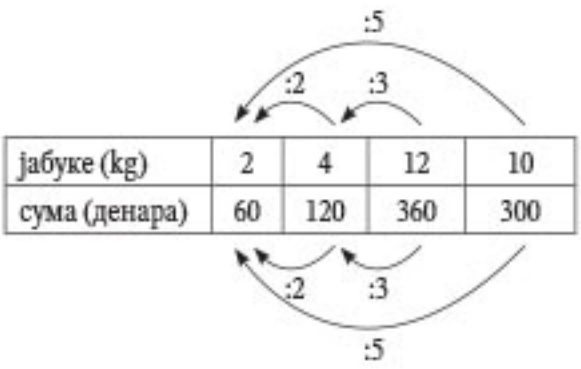
$3 \cdot 160 = 480$ денара.

б) Број свезака и новац који морамо да платимо за свеске су правопропорционалне величине, јер се повећањем једне количине, друга количина такође повећава у истом размеру.

У табелама је количина купљених јабука дата у килограмима, а износ који морамо да платимо за количину купљених јабука изражен је у денарима.



јабуке (kg)	2	4	12	10
сума (денара)	60	120	360	300



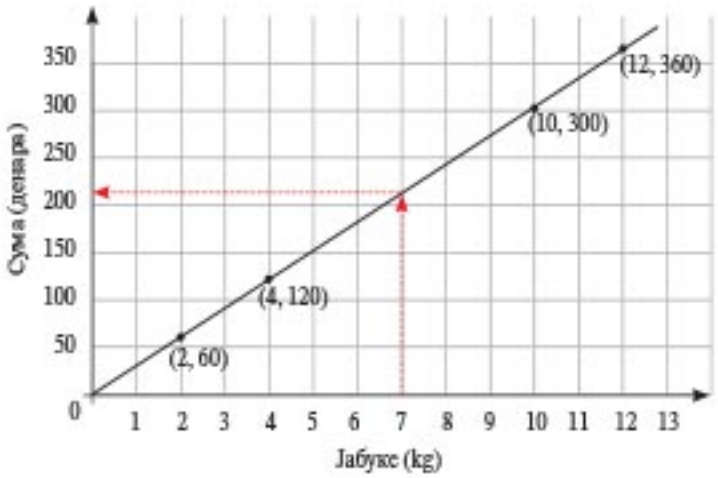
јабуке (kg)	2	4	12	10
сума (денара)	60	120	360	300

Количина купљених јабука и цена коштања јабука су директно пропорционалне количине.

Да забележимо да су одговарајући количници износа новца који морамо да платимо и количине купљених јабука

$60 : 2 = 120 : 4 = 360 : 12 = 30,$

увек исти број који одређује цену килограма јабука. Ако добијене вредности уцртамо као тачке на координатној равни (*цртеж 1*) добићемо **праву кроз координатни почетак.**



цртеж 1

У нашем примеру имамо само величине које нису негативне. Стога је графикон полуправа која почиње у координатном почетку.

Уз помоћ табеле или графикона можемо израчунати и вредности које нису приказане са њима.

Према табели можемо израчунати да:

за 510 денара можемо да купимо $510 : 30 = 17$ kg јабука, или

за 17 kg јабука треба да платимо $17 \cdot 30 = 510$ денара.

Из графикона можемо закључимо да:

за 7 kg јабука треба да платимо 210 денара, или

за 210 денара можемо да купимо 7 kg јабука.

Пример 2

Ако 3 kg авокада кошта 810 денара, колико ће денара коштати 7 kg авокада?

Ако 3 kg авокада кошта 810 денара, можемо израчунати да:
1 kg авокада кошта 810 : 3 = 270 денара,
7 kg авокада ће коштати 7 · 270 = 1890 денара.

Задатак 1

Линдита за 15 min пешице прође 1 km. Колку километри ће прођи за: а) 1 h, б) 2,5 h?

Пример 3

За бојење зида од 3 m^2 у зелено, потребно нам је 600 ml жуте и 21 ml плаве боје.
а) Колико милилитара сваке боје нам је потребно да бисмо офарбали зид од 12 m^2?
б) Колико квадратних метара може да се офарба са 0,828 l зелене боје?

а) Ако нам је за 3 m^2 зида зелене боје потребно 600 ml жуте боје и 21 ml плаве боје, онда ће нам за 12 m^2 бити потребно
4 · 600 = 2 400 ml жуте боје и 4 · 21 = 84 ml плаве боје.

б) Ако нам је за за 3 m^2 зида у зеленој боји потребно 600 ml жуте боје и 21 ml плаве боје, тада ће нам за 1 m^2 зида бити потребно
600 : 3 = 200 ml жуте боје и 21 : 3 = 7 ml плаве боје.

Со 207 ml = 0,207 l зелене боје може да се офарба 1 m^2. Јер је 0,828 : 0,207 = 4 заклучујемо да са 0,828 l зелене бое можемо да офарбамо 4 m^2.

Задатак 2

Кројач Емин сашије 4 одела за 16 дана.
а) Колико дана ће му требати да сашије 12 одела?
б) Колико одела ће сашити за 64 дана?

Обратнопропорционалне величине

Активност

У једној школи има укупно 36 ученика у осмим разредима. Они хоће да иду на екскурзију и потребно је да се изнајми аутобус. Управа школе се одлучила за фирму која нуди дневни закуп аутобуса за 36000 денара. Колико би коштало изнајмљивање аутобуса по ученику ако би сви ишли на екскурзију? Да ли ће се цена изнајмљивања по ученику смањити или повећати уколико 12 од укупног броја деце не иде на екскурзију?

За две величине кажемо да су **обратнопропорционалне** ако се повећањем једне величине узрокује смањење друге величине у истој пропорцији.

Другим речима, две величине су обратнопропорционалне ако је број пута колико се једна величина повећа једнак броју пута колико се друга величина умањи, тј. број пута колико се једна величина умањује једнак је броју пута колико се друга величина повећа.

Пример 4

Извиђачи треба да донесу 10 малих балвана у свој камп.

а) Ако се више извиђача пријави за задатак, да ли ће сваки извиђач донети више или мање балвана?

б) Ако се мање извиђача пријави за задатак, да ли ће сваки извиђач донети више или мање балвана у камп?

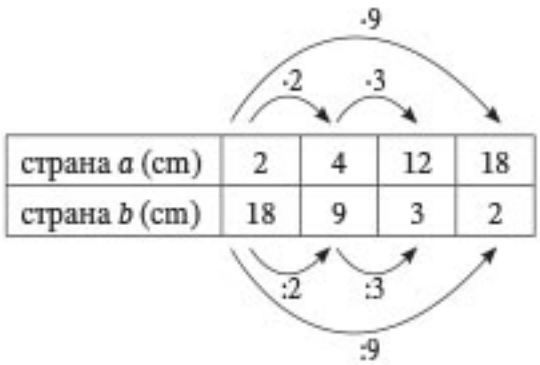
в) Да ли је број извиђача обратнопропорционалан броју балвана које ће носити?

а) Ако се више извиђача пријави за задатак, сваки ће донети мањи број балвана.

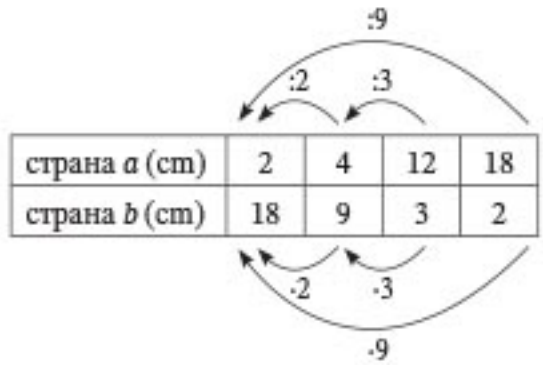
б) Ако се мање извиђача пријави за задатак, сваки извиђач ће донети више балвана.

в) Број извиђача и број балвана по извиђачу су обратнопропорционалне величине.

У табелама су дате дужине страница a и b у центиметрима, неколико правоугаоника површине 36 cm^2.



страна a (cm)	2	4	12	18
страна b (cm)	18	9	3	2



страна a (cm)	2	4	12	18
страна b (cm)	18	9	3	2

Колико пута се једна страница смањи, друга страница се повећа и обратно, а површина остаје непромењена. Одговарајући производи

$2 \cdot 18 = 4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = 18 \cdot 2 = 36,$

увек дају површину правоугаоника.

Помоћу табеле, можемо да израчунамо дужине страница a и b, за вредности које нису приказане у њој:

ако је дужина странице a 9 cm, онда дужина странице b износи $36 : 9 = 4$ cm, или

ако је дужина странице b 4 cm, онда је дужина странице a $36 : 4 = 9$ cm.

Пример 5

Ако 24 радника обаве посао за 16 дана, за колико дана ће обавити посао:
а) 6 радника, б) 48 радника?

а) 6 радника је 4 пута мање радника. Они ће обавити посао за 4 пута више дана:

$4 \cdot 16 = 64$ дана.

б) 48 радника је 2 пута више радника, тако да ће они обавити посао за 2 пута мање дана:

$16 : 2 = 8$ дана.

Уочи да је $24 \cdot 16 = 6 \cdot 64 = 48 \cdot 8 = 384$.

Задатак 3

Кофа воде од 2 l се напуни једном флашом за 60 секунди.
Колико је времена потребно да се канта напуни ако се пуни:
а) из две флаше истовремено, б) из три флаше истовремено?

Пример 6

За поплочавање терасе потребно је 80 плочица површине 30 cm^2. Колико плочица је потребно да би се поплочала тераса са плочицама површине 25 cm^2?

Површина терасе је $80 \cdot 30 = 2\,400$ cm^2. За поплочавање терасе плочицама површине 25 cm^2, потребно је $2\,400 : 25 = 96$ плочица површине 25 cm^2.

Задатак 4

Две компаније за чишћење станова и канцеларија оглашавају се на истом огласном простору. Компанија „Чисто“ каже да 4 њихова радника могу да очисте стан за 5 сати, а компанија „Брзо“ каже да 6 њихових радника може да очисти исти стан за 4 сата. Под претпоставком да ће стан бити подједнако чист, која је компанија ефикаснија?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Које од следећих величина су правопропорционалне:
   а) Број кифлица и брашно употребљено за прављење кифлица?
   б) Брзина аутомобила и време потребно да би се прешла одређена удаљеност?
   в) Број дечака који деле одређену количину новца и износ који ће сваки дечак добити?
   г) Износ који плаћамо за сладолед и број кугли које можемо добити за ту суму?

2. Екрем трчи 100 m за 20 s.
   а) Ако трчи истим темпом, колико му је времена потребно да претрчи: 200 m, 300 m и 400 m?
   б) Направи табелу у коју ћеш унети дате и добијене вредности за дужину стазе и време трчања.
   в) Нацртај графикон који илуструје зависност времена трчања од дужине стазе.
   г) Према табели и графикону, одреди колико метара ће претрчати за 30 s?

3. Аутомобил потроши 25 l горива да би прешао 355 km. Колико далеко може да пређе аутомобил са 42 l горива?

4. Да би се офарбао зид површине 42m², потребно је 6 l боје. Колико литара боје је потребно за 63 m²?

5. На бочици течног ђубрива за цвеће пише да се 20 ml ђубрива додаје на 10 l воде.
   а) Запиши размер ђубрива и воде,
   б) Бакина канта за заливање садржи 4 литра. Колико милилитара ђубрива бака Зора треба да стави у канту за заливање?

6. Које од следећих величина су правопропорционалне, а које обратнопропорционалне:
   а) Број радника и време које проводе обављајући одређени посао?
   б) Цена робе и количина робе која се може купити за одређену суму?
   в) Дужине страница правоугаоника површине 1 cm²?

7. а) Нацртај и попуни табелу, ако су величине x и y обратнопропорционалне:

x	1	2	3	4
y		6		

   б) Према табели, одреди одговарајућу вредност x за $y = 1$.

8. Једна боца пуни резервоар медицинским кисеоником за 50 минута при истом протоку.
   Колико је времена потребно да би се резервоар напунио:
   а) са 2 боце,
   б) са 5 боца,
   в) са 10 боца?

9. Родитељи купују плочице за кухињу. Ако узму квадратне плочице са страницом 50 cm, биће им потребно 36 плочица. Мајка преферира мање плочице, такође квадратне, али са страницом 30 cm.
   а) Колико комада мањих плочица ће им бити потребно?
   б) Ако веће плочице коштају 70 денара по комаду, а мање 30 денара по комаду, за које плочице ће платити више?

10. **Пројектни задатак**
    Користећи пропорционалне и обрнуто пропорционалне односе, разумећеш примену математике у природним наукама.

1) Биологији
   Измери број откуцаја твог срца (на зглобу или на врату) након 10 s, 30 s и 60 s.
   а) Како број откуцаја срца зависи од времена мерења?

б) Направи табелу и нацртај график зависности броја откуцаја срца од времена мерења.

в) Према графику, одреди колики је број откуцаја срца након 120 s.

2) Географије

Изабери једну локацију. У три различита времена (на пример, у 10h , у 11h и у 12h) измери време док не прође тачно 30 пешака. Затим, израчунај проток пешака (количник од 30 и времена које је било потребно да прође 30 пешака).

а) Колика је зависност времена од протока пешака, правопропорционална или обратнопропорционална?

б) Направи табелу зависности времена од протока пешака.

в) Према табели, одредите за колико минута ће бити потребно да прође 30 пешака, ако је проток 12 пешака у минути?

3) Физике

Изабери три стазе у твом школском дворишту. Измери њихову дужину и време које ти је потребно да би прешао сваку стазу истом брзином.

а) Колика је зависност времена од дужине стазе, ако се крећеш истом брзином?

б) Направи табелу и нацртај график зависности времена од дужине стазе.

в) Према графику одредит колико ће ти времена требати да би прешао стазу дужине 20 метара.

4) Хемије

Напуни две чаше са 100 ml и 300 ml воде. Редом у сваку чашу стави зрно грожђа и додаји по пола кашичице соли и мешај све док грожђе не исплива на површину. Запиши колико соли си додао у сваку чашу.

а) Колика је зависност количине додате соли од количине воде?

б) Направит табелу и нацртај график зависности количине додате соли од количине воде.

в) Према графику одреди коју количину соли треба додати у 400 ml воде да би грожђе испливало на површину?

12. САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

Сабирање рационалних бројева

Активност

Један бициклист је за један сат прешао $\frac{3}{4}$ стазе, а другог сата је прешао $\frac{1}{6}$ стазе. Да би израчунао колики део стазе је прешао бициклиста за 2h, запиши изразе са разломцима који одговарају обојеним деловима на цртежу.



цртеж 1

Објасни кораке којима си израчунао део стазе коју је бициклиста прешао за 2 h.

Скенирај код и подсети се како се сабирају разломци.

Пример 1

Израчунај збир рационалних бројева: а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{-4}{5}$, б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{-3}{8}$.

а) Рационални бројеви су разломци са истим имениоцима:

$$\frac{2}{5}+\frac{-4}{5}=\frac{2+(-4)}{5}=\frac{-2}{5}.$$

Збир бројилаца разломака записујемо као бројилац збира разломака, а именилац је једнак имениоцима разломака.

б) Рационални бројеви су разломци са различитим имениоцима:

$$\frac{5}{6}+\frac{-3}{8}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{(-3)\cdot 3}{8\cdot 3}$$

НЗС (6, 8) = 24, 24 : 6 = 4, 24 : 8 = 3.

$$=\frac{20}{24}+\frac{-9}{24}=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}.$$

Разломке скраћујемо на разломке са истим имениоцима, а затим их сабирамо као разломке са једнаким имениоцима.

- **Разломци са истим имениоцима се сабирају тако што се збир бројилаца запише као бројилац збира разломака, а именилац је једнак имениоцима разломака.**
- **Разломци са различитим имениоцима се сабирају тако што се прво своде на исте имениоце, а затим се сабирају као разломци са истим имениоцима.**

Пример 2

Израчунај збир рационалних бројева: а) $-3\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, б) $-7{,}5$ и $3{,}67$.

а) $-3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-7\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{1\cdot 1}{4\cdot 1}=$

$=\frac{-14}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-14+1}{4}=\frac{-13}{4}=-3\frac{1}{4}$,

Мешовите бројеве записујемо као неправилне разломке

б) $-7{,}5+3{,}67=\frac{-75}{10}+\frac{367}{100}=\frac{-75\cdot 10}{10\cdot 10}+\frac{367}{100}$

$=\frac{-750}{100}+\frac{367}{100}=\frac{-750+367}{100}=-3\frac{83}{100}$.

Децималне бројеве записујемо као децималне разломке.

Задатак 1

Израчунај: а) $\frac{4}{9}+\frac{-5}{12}$, б) $\frac{-3}{5}+\frac{-7}{15}$, в) $\frac{-10}{11}+2\frac{7}{10}$, г) $-0{,}54+(-8{,}8)$.

Задатак 2

Ронилац је био на дубини од 12,5 m испод површине мора. Затим се попео на $2\frac{3}{5}$ m.

а) На којој дубини је био ронилац?

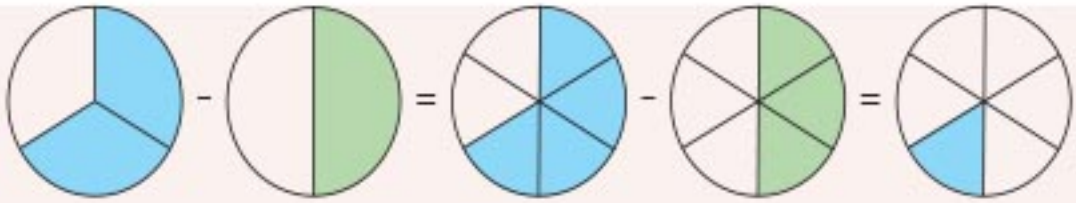
б) Да ли је ближе или даље од површине мора?

Одузимање рационалних бројева

Активност

Столар Бесим је исекао комад дужине $\frac{2}{3}$ m од даске дужине $\frac{1}{2}$ m.

Да би израчунао колико му је даске остало, напиши изразе са разломцима који одговарају обојеним деловима на *цртежу 2.*



цртеж 2

Пример 3

Израчунај разлику: а) $\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}$, б) $\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}$.

а) Рационални бројеви су разломци са истим имениоцем:

$\frac{-3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{-3-2}{7}=\frac{-5}{7}$.

Разлику бројилаца у низу записујемо као бројилаца разломка - разлике, а именилац је једнак са имениоцима разломака.

б) Рационални бројеви су разломци са различитим имениоцима:

$\frac{-3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{-3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}$

НЗС (8, 6) = 24, 24 : 8 = 3, 24 : 6 = 4.

$=\frac{-9}{24}-\frac{20}{24}=\frac{-9-20}{24}=\frac{-29}{24}=-1\frac{5}{24}$.

Разломци се своде на разломке са истим имениоцима, а затим се одузимају као разломци са истим имениоцима.

- Разломци са истим имениоцима се одузимају тако што се разлика бројилаца по редоследу запише као бројилац разломка-разлике, а именилац је једнак са имениоцима разломака.
- Разломци са различитим имениоцима се одузимају тако што се разломци прво своде на разломке са истим имениоцима, а затим се одузимају као разломци са једнаким имениоцима.

Пример 4

Израчунај разлику: а) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$, б) $-2{,}5-3{,}75$, в) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}$, г) $-2{,}5-3{,}75$.

а) $2\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11}{4}-\frac{1}{3}=\frac{11\cdot 3}{4\cdot 3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{33}{12}-\frac{4}{12}=\frac{33-4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$,

б) $-\frac{3}{5}-\frac{-4}{9}=\frac{-3\cdot 9}{5\cdot 9}-\frac{-4\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{-27}{45}-\frac{-20}{45}=\frac{-27-(-20)}{45}=\frac{-7}{45}=-\frac{7}{45}$,

в) $-2\frac{1}{4}-1\frac{5}{7}=\frac{-9}{4}-\frac{12}{7}=\frac{-9\cdot 7}{4\cdot 7}-\frac{-12\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{-63}{28}-\frac{-48}{28}=\frac{-63-(-48)}{28}=\frac{-15}{28}=-1\frac{11}{28}$,

г) $-2{,}5-3{,}75=\frac{-25}{10}-\frac{375}{100}=\frac{-25\cdot 10}{10\cdot 10}-\frac{375}{100}=\frac{-250-375}{100}=\frac{-625}{100}=\frac{-25}{4}=-6\frac{1}{4}$.

Задатак 3

Израчунај: а) $\frac{7}{16}-\frac{-5}{12}$, б) $\frac{-8}{15}-\frac{-6}{21}$, в) $-1\frac{5}{7}-3\frac{3}{4}$, г) $-12{,}54-15{,}2$.

Задатак 4

Једног зимског дана, температура ујутру у Берову била је $-\frac{5}{2}$ °C. До подне температура се попела за $3\frac{1}{4}$ °C. Поподне се опет смањила за 2,6 °C.

а) Колика је била температура у подне?

б) Колика је била температура после подне?

в) Да ли је поподневна температура виша или нижа од јутарње температуре и за колико степени?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај: а) $\frac{-1}{6}+\frac{-3}{8}$, б) $-13\frac{2}{3}+10\frac{1}{4}$, в) $-17+1\frac{5}{6}$, г) $-1{,}55+0{,}7$.
2. Израчунај: а) $\frac{1}{5}-\frac{3}{8}$, б) $-1\frac{2}{7}-\frac{1}{9}$, в) $-1-1\frac{5}{7}$, г) $-0{,}17-1{,}325$.
3. Ана и Ерол су отишли у продавницу да купе воће. Ана је купила $\frac{3}{4}$ kg јабука, $\frac{2}{3}$ kg крушака. Ерол је купио 2,4 kg поморанџи и 1,35 kg мандарина.
   а) Колико килограма воћа је купила Ана?
   б) Колико килограма воћа је купио Ерол?
   в) Ко је купио више воћа и за колико килограма?
4. У великој чаши било је 2,5 l воде. $\frac{2}{5}$ *l* је испарило загревањем, а затим је додато 1,1 *l* свеже воде. Колика је укупна количина воде у чаши?
5. Температура раствора је била -2,3 °C. Затим се повећала за $5\frac{3}{5}$ °C, а затим смањила за 3,2 °C. Колика је температура након промена?
6. Биљка је почетно висока $8\frac{2}{5}$ cm. Током једне недеље је порасла за 2,3 cm,а затим се део стабљике скратио за 0,9 cm због слабог раста. Колико је биљка сада висока? Колико јој је потребно да порасте да би достигла висину од 12 cm?
7. Марина меша чај у бокалу. На почетку је било $1\frac{4}{5}$ *l* чаја. 0,4 *l* је испарило током загревања, а затим је додала 0,75 *l* свежег чаја.
   а) Колика је укупна количина чаја након свих промена?
   б) Ако жели да попије 3 *l* чаја, колико још литара треба да дода?
8. Јована има негативан салдо од 450 денара. Уплатила је $31\frac{1}{4}$ денара на свој рачун.
   а) Колико ће бити стање на рачуну?
   б) Ако потроши још 125,75 денара, колико ће бити коначно стање на рачуну?

9. Елена је одиграла три сета тениса током викенда. У првом сету је имала лошији резултат за $1\frac{1}{5}$ поена од своје противнице. У другом сету је освојила 2,3 поена више од своје противнице. У трећем сету је имала лошији резултат за $1\frac{1}{5}$ поена у односу на своју ротивницу.

а) Колики је Еленин укупан резултат у односу на њену противницу после сва три сета?

б) Да ли је укупно освојила више или мање поена од своје противнице?

Истраживање

Ако испуните захтеве у истраживању, научићеш да сабираш и одузимаш рационалне бројеве у децималном облику, без претварања децималних бројева у децималне разломке.

а) Познато ти је да се при сабирању целих бројева примењује следеће правило:

- **Збир два цела броја са истим знацима** је цео број чија је апсолутна вредност збир апсолутних вредности два броја (као збир природних бројева), са истим знаком као и знаци сабирака.
- **Збир два различита броја са различитим знацима** је цео број чија је апсолутна вредност једнака разлици веће и мање апсолутне вредности та два броја, а његов знак је једнак знаку броја са већом апсолутном вредношћу.
- **Разлика два цела броја** се добија када се умањеник дода супротном броју од умањитеља..

Слично као и код целих бројева, можемо дефинисати **апсолутну вредност рационалног броја** x на следећи начин:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ако је x позитиван рационалан број} \\ 0, & \text{ако је x = 0} \\ -x, & \text{ако је x негативан рационалан број} \end{cases}$$

Пратећи правило за сабирање и одузимање целих бројева, изведи правило сабирањА рационалних бројева у децималном облику.

б) Користећи правило, израчунај: 1,2 + 0,5; −1,2 + (−0,5); −1,2 + 0,5; 1,2 + (−0,5).

Скенирај кодове и реши задатке.

Сабирање целих бројева

Одузимање целих бројева

Одузимање децималних бројева

13. МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

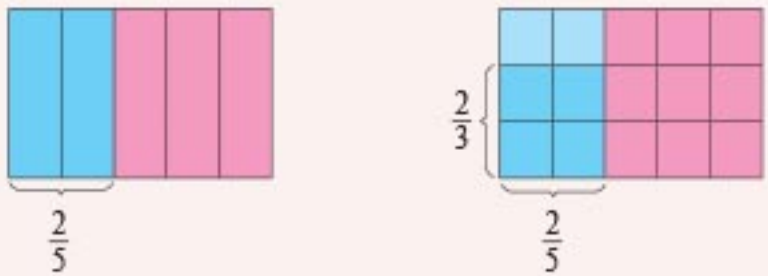
Множење рационалних бројева

Активност

Демир је направио $\frac{2}{5}$ својих слика и отишао код свог пријатеља Михаила. Од слика које је направио, Демир је дао Михаилу $\frac{2}{3}$ (*цртеж* 1).

а) Који део слика је Демир дао Михаилу?

б) Коју операцију си користио зда би израчунао?



цртеж 1

Скенирај код и подсети се како се множе разломци.

Пример 1

Израчунај производ рационалних бројева: а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$, б) $\frac{-2}{3}$ и $\frac{5}{7}$.

а) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$, б) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{(-2)\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{-10}{21}$.

Производ разломака је разломак чији је бројилац једнак производу бројилаца чинилаца, а именилац је производ именилаца чинилаца.

Пример 2

Израчунај производ $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}$.

Први начин: $\frac{-10}{21}\cdot\frac{14}{25}=\frac{-10\cdot 14}{21\cdot 25}=\frac{-140}{525}=\frac{-28}{105}=\frac{-4}{15}$. Рачунамо, па кратимо.

Други начин: $\frac{-\cancel{10}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{14}}{\cancel{25}} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{-4}{15}$. Кратимо, па рачунамо.

Пример 3

Израчунај производ: а) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3}$, б) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7)$.

а) $-1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{3} = -\frac{7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{-7 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{-49}{15} = -3\frac{4}{15}$,

б) $-2{,}4 \cdot (-1{,}7) = \frac{-24}{10} \cdot \frac{-17}{10} = \frac{-24 \cdot (-17)}{10 \cdot 10} = \frac{408}{100} = \frac{102}{25} = 4\frac{2}{25}$.

Задатак 1

Израчунај производ: а) $\frac{-105}{72} \cdot \frac{18}{15}$, б) $1\frac{8}{11} \cdot \frac{-33}{45}$, в) $\frac{-7}{17} \cdot \frac{-1}{10}$, г) $-0{,}4 \cdot 1{,}5$.

Пример 4

Температура у фрижидеру је била 2,5 °C. Затим се повећала 1,4 пута у односу на почетну температуру.

а) За колико степени Целзијуса се повећала температура у фрижидеру?

б) Колика је била нова температура у фрижидеру?

а) Температура се повећала за: $2{,}5 \cdot 1{,}4 = \frac{25}{10} \cdot \frac{14}{10} = \frac{350}{100} = 3{,}5$ °C.

б) Нова температура у фрижидеру је износила: $2{,}5 + 3{,}5 = \frac{25}{10} + \frac{35}{10} = \frac{60}{10} = 6$ °C.

Задатак 2

Јована има уштеђевину од 312,5 денара. Она решава да је повећа за $1\frac{2}{3}$ пута, а да затим потроши $\frac{3}{4}$ од нове суме за куповину књига.

Колико денара ће остати Јовани после куповине књига.

Дељење рационалних бројева

Активност

Три литра воде треба поделити у боце од пола литра.

а) Колико боца ће бити потребно?

б) Коју операцију ћеш користити да би израчунао?

Скенирај код и подсети се како се деле цели бројеви.

Пример 5

Израчунај производ: а) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$, б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}$. Шта примећујеш?

а) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot4}{4\cdot3}=\frac{12}{12}=1$, б) $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot5}{5\cdot3}=\frac{15}{15}=1$.

Сигурно сте уочили да је бројилац првог разломка једнак имениоцу другог разломка, а именилац првог разломка једнак је бројиоцу другог разломка.
Такве разломке називамо **реципрочним разломцима.**

Пример 6

Израчунај количник: а) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}$, б) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}$, в) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}$.

а) $\frac{3}{4}:\frac{7}{11}=\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{7}=\frac{3\cdot11}{4\cdot7}=\frac{33}{28}=1\frac{5}{28}$ Реципрочни разломак разломка $\frac{7}{11}$ је разломак $\frac{11}{7}$.

б) $\frac{-5}{9}:\frac{3}{4}=\frac{-5}{9}\cdot\frac{4}{3}=\frac{-5\cdot4}{9\cdot3}=\frac{-20}{27}$ Реципрочни разломак разломка $\frac{3}{4}$ је разломак $\frac{4}{3}$.

в) $\frac{-12}{21}:\frac{2}{-7}=\frac{-\cancel{12}}{\cancel{21}}\cdot\frac{-\cancel{7}}{\cancel{2}}=\frac{-\cancel{6}\cdot(-1)}{\cancel{3}\cdot1}=2$ Реципрочни разломак разломка $\frac{2}{-7}$ је разломак $\frac{-7}{2}$.

Количник два разломка једнак је производу дељеника и реципрочне вредности делиоца.

Пример 7

Израчунај количник: а) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}$, б) $-1{,}2:(-2{,}3)$.

а) $-1\frac{1}{27}:2\frac{2}{9}=-\frac{28}{27}:\frac{20}{9}=\frac{-\cancel{28}}{\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{9}}{\cancel{20}}=\frac{-7}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{-7\cdot1}{3\cdot5}=\frac{-7}{15}$

б) $-1{,}2:(-2{,}3)=\frac{-12}{10}:\frac{-23}{10}=\frac{-12}{\cancel{10}}\cdot\frac{-\cancel{10}}{23}=\frac{12}{23}$

Задатак 3

Израчунај количник:

а) $\frac{-8}{5}:\frac{2}{3}$, б) $\frac{18}{25}:\frac{-72}{75}$, в) $\frac{-125}{64}:\frac{-50}{16}$.

Скенирај го кодот и реши ги задачите.

Пример 8

Антонија хоће да направи сок за своје пријатеље. Једна флаша концентрата сока садржи 0,7 *l*. Колико флаша концентрата сока јој је потребно да направи 3,5 *l* сока?

Број потребних флаша износи:

$$3{,}5 : 0{,}7 = \frac{35}{10} : \frac{7}{10} = \frac{\cancel{35}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{7}} = 5.$$

Антонији је потребно 5 флаша концентрата за сок.

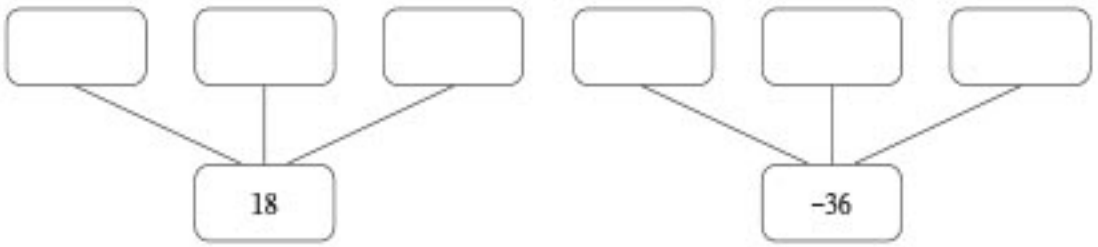
Задатак 4

Компанија која извози на страно тржиште има дуг од 825,75 евра. Да би га смањила, руководство планира да отплати дуг у 15 једнаких рата. Након отплате прве рате, компанија остварује профит од 312,50 евра. Колики ће бити дуг компаније након плаћања прве рате и додавања профита?

Напомена: У скупу рационалних бројева, дељење је увек могуће, осим када је делилац 0. Запамти, **дељење нулом није могуће.**

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај производ: а) $-15 \cdot \frac{-8}{5}$, б) $-\frac{5}{2} \cdot \frac{-7}{5}$, в) $-8\frac{1}{2} \cdot 36$, г) $(-0{,}5) \cdot (-0{,}12)$.
2. Израчунај количник: а) $12 : \frac{-8}{9}$, б) $5\frac{1}{3} : \left(-5\frac{1}{3}\right)$, в) $3{,}4 : \left(-1\frac{7}{10}\right)$, г) $-230 : 2{,}3$.
3. Прецртај дијаграме на *цртежу* 2 у своју свеску. У празна места напиши представу датог броја користећи сабирање, одузимање, множење и дељење рационалних бројева.



цртеж 2

4. Најнижа температура икада забележена у некој области је −18,4 °C. Због климатских промена, порасла је 1,6 пута у односу на почетну температуру. Касније током топлотног таласа, порасла је за 12,5 °C. Колико износи нова температура?
5. У учионици за физику, Теута ставља два термометра у два различита фрижидера за експеримент. Фрижидер А има температуру од −3,2 °C, а фрижидер Б има температуру од 2,5 °C. Она одлучује да постигне температуру у фрижидеру А која је 1,5 пута већа од првобитне температуре, а температуру у фрижидеру Б која је 2,4 пута већа од првобитне температуре.

а) Колика ће бити нова температура у фрижидеру А?
б) Колика ће бити нова температура у фрижидеру Б?

6. Рачун А је у минусу -4,5 хиљада денара. Банка обрачунава камату и салдо је подељен са 0,5. Рачун Б је у плусу 7,2 хиљаде денара, али га трошкови смањују за 1,8 пута (дели се са 1,8).
а) Колико је ново стање на рачуну А?
б) Колико је ново стање на рачуну Б?
в) Ако се два рачуна споје у нови рачун, да ли ће стање бити позитивно или негативно?

7. Тим треба да постави1177,5 m оптичког кабла дуж улице. План је да се кабл постави на 15 једнаких делница. После постављања кабла на првој делници, стигао је други тим и одмах поставио 312,5 m кабла.
а) Колика је дужина једне делнице?
б) Колико кабла је остало да се постави после прве делнице пре него што се други тим укључио?
в) Колико кабла је остало да се постави након укључивања другог тима?

8. У лабораторијском експерименту коришћено је 256,5 g раствора киселине. Количина треба да се подели на 12 једнаких узорака за ђаке.
а) Колику масу раствора киселине има сваки узорак?
б) Ако је сваки ђак додао 15,25 g киселине свом узорку, колика ће бити укупна маса узорка након додавања?
в) Како ће се променити концентрација киселине у узорку након додавања? Објасни свој одговор.

Истраживање

1. а) Препиши и попуни табелу у вези са знаком производа и количником два рационална броја a и b.

a	b	$a \cdot b$	$a : b$
+	+		
+	−		
−	+		
−	−		

б) Да ли ће табела бити идентична датој, ако су a и b цели бројеви. Зашто?
в) Шта можеш закључити, у ком случају је знак позитиван, а у ком случају негативан?

2. Ако испуниш захтеве у истраживању, научићеш да множиш и делиш рационалне бројеве у децималном облику, без претварања децималних бројева у децималне разломке.

а) Познато нам је да се при множењу и дељењу целих бројева примењује правило:

- **Производ** два цела броја са различитим знацима је негативан број чија је апсолутна вредност једнака производу апсолутних вредности тих чинилаца.
- **Производ** два цела броја са истим знацима је позитиван број чија је апсолутна вредност једнака производу апсолутних вредности тих чинилаца.
- **Количник** (ако постоји) од два цела броја са различитим знацима је негативан број чија је апсолутна вредност једнака количнику апсолутних вредности дељеника и делиоца.

- **Количник** (ако постоји) од два цела броја са истим знацима је позитиван број чија је апсолутна вредност једнака количнику апсолутних вредности дељеника и делиоца.

Следећи правило множења и дељења целих бројева, изведи правило за множење и дељење рационалних бројева у децималном облику.

б) Користећи правило, израчунај:

$1{,}2 \cdot 0{,}5;\ -1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ -1{,}2\ 0{,}5;\ 1{,}2 \cdot (-0{,}5);\ 1{,}2 : 0{,}5;\ -1{,}2 : (-0{,}5);\ -1{,}2 : 0{,}5;$

14. ОСОБИНЕ ОПЕРАЦИЈА СА РАЦИОНАЛНИМ БРОЈЕВИМА

Активност

Израчунај збирове:

а) $7 + (-4)$ и $(-4) + 7$,

б) $[12 + (-8)] + 3$ и $12 + [(-8) + 3]$.

Шта примећујеш? Која својства има операција сабирања целих бројева?

Скенирај код и израчунај збир.

Пример 1

Израчунај збир: а) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}$ и $\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}$, б) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}$ и $\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)$.

а) $\frac{1}{2}+\frac{-3}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{-3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{-1}{4}$,

$\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{-3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}$.

Сабирци су променили места.

Збир се није променио.

б) $\left(\frac{-1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{-3}{4}=\frac{-3+4}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{-3}{4}=\frac{2-9}{12}=\frac{-7}{12}$,

$\frac{-1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{-3}{4}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{8-9}{12}=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{12}=\frac{-6-1}{12}=\frac{-7}{12}$.

Начин груписања сабирака је промењен.

Збир се није променио.

- **Комутативно својство сабирања:** Збир два рационална броја се не мења ако сабирци замене места.
- **Асоцијативно својство сабирања:** Збир рационалних бројева не зависи од начина груписања сабирака.

Задатак 1

Миле је заронио на -3,7 m надморске висине, а затим се спустио још 2,5 m. Сеад је прво истраживао подводни свет на -2,5 m надморске висине, а затим се спустио још 3,7 m. Без рачунања, одредите да ли су се Миле и Сеад нашлина истој висини?
Објасни свој одговор.

Пример 2

Израчунај: а) $\frac{-3}{7}+0$, б) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}$.

а) $\frac{-3}{7}+0=\frac{-3}{7}+\frac{0}{7}=\frac{-3+0}{7}=\frac{-3}{7}$, б) $\frac{1}{6}+\frac{-1}{6}=\frac{1+(-1)}{6}=\frac{0}{6}=0$.

Разломци $\frac{1}{6}$ и $\frac{-1}{6}$ су **супротни** један другом.

Активност

Израчунај производе: а) $40\cdot(-8)$ и $(-8)\cdot 40$, б) $[(-42)\cdot(+5)]\cdot(-8)$ и $(-42)\cdot[(+5)\cdot(-8)]$.
Шта примећујеш? Која својства има операција множења целих бројева?

Пример 3

Израчунај производе: а) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}$, б) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}$ и $\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)$.

а) $\frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{-2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{-6}{35}$, Чиниоци су променили места.

$\frac{3}{7}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{3\cdot(-2)}{7\cdot 5}=\frac{-6}{35}$. Производ се није променио.

б) $\left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1\cdot 1}{3\cdot 4}\cdot\frac{-3}{5}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{-\cancel{3}}{5}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{-1}{5}=\frac{-1\cdot(-1)}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$, Начин груписања чиниоца је промењен.

$\frac{-1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{5}\right)=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1\cdot(-3)}{4\cdot 5}=\frac{-1}{\cancel{3}}\cdot\frac{-\cancel{3}}{20}=\frac{(-1)\cdot(-1)}{20}=\frac{1}{20}$. Производ се није променио.

- **Комутативно својство множења:** Производ два рационална броја се не мења ако се чиниоци замене своја места.
- **Асоцијативно својство множења:** Производ рационалних бројева не зависи од начина на који су чиниоци груписани.

Пример 4

Израчунај производ: а) $\frac{-4}{5}\cdot 1$, б) $\frac{-2}{3}\cdot 0$, в) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}$.

а) $\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{4}{5}$, б) $\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{2\cdot 0}{3}=\frac{0}{3}=0$, в) $\frac{-2}{7}\cdot\frac{7}{-2}=1$.

Разломци $\frac{-2}{7}$ и $\frac{7}{-2}$ су **реципрочни** један другом.

Због асоцијативног закона сабирања и множења, можемо да израчунамо збир или производ коначно много рационалних бројева.

Задатак 2

Израчунај: а) $2\frac{1}{10}+3\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$, б) $\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{3}\cdot 3\frac{2}{4}$, в) $\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Активност

Мери је одлучила да штеди од свог џепарца, тако да ће сваког дана трошити по 200 денара, што је 300 денара од дневног џепаца. За 7 дана је израчунала да ће уштедети

$300\cdot 7-200\cdot 7=(300-200)\cdot 7=100\cdot 7=700$ денара.

Које својство је Мери применила у свом прорачуну?

Дистрибутивно својство множења у односу на сабирање: При множењу збира датим бројем, резултат је исти без обзира да ли прво израчунамо збир, а затим га помножимо датим бројем, или ако прво помножимо сваки од збира датим бројем, а затим саберемо добијене производе. Дистрибутивно својство множења важи и за одузимање.

Задатак 3

Провери дистрибутивно својство кроз пример $\left(1{,}2+\frac{3}{5}-7\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Применом горе наведених својстава операција сабирања и одузимања у многим случајевима можемо олакшати прорачуне.

Пример 5

Израчунај на најлакши начин: а) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}$, б) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4$, в) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64$

.

а) $7-3\frac{1}{3}+9-5\frac{2}{3}=7-\frac{10}{3}+9-\frac{17}{3}=7+9-\left(\frac{10}{3}+\frac{17}{3}\right)=16-\frac{27}{3}=16-9=7$,

б) $-2{,}5\cdot(-37{,}9)\cdot 4=\frac{-25}{10}\cdot 4\cdot\frac{-379}{10}=-10\cdot\frac{-379}{10}=379$,

в) $2{,}52\cdot 36+2{,}52\cdot 64=2{,}52\cdot(36+64)=\frac{252}{100}\cdot 100=252$.

Задатак 4

Теа је купила 3,5 kg јагода за 55 денара, 3,5 kg трешања за 45 денара и 3,5 kg трешања за 100 денара. Колико је денара укупно платила за воће?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Провери једначину $a+(b+c)=(a+b)+c$ за рационалне бројеве:
   а) $a=-2\frac{3}{4}$, $b=\frac{-2}{7}$ и $c=\frac{4}{5}$, б) $a=\frac{-1}{2}$, $b=1\frac{2}{3}$ и $c=-0{,}6$.

2. Израчунај $\frac{1}{2}$ од $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6}$ од $\frac{1}{2}$. Затим упореди добијене резултате. Шта закључујеш? Објасни свој одговор.

3. Израчунај помоћу комутативног и асоцијативног својства.
   а) $3\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{2}+4\frac{7}{12}$, б) $\frac{-3}{8}+12\frac{3}{4}-3\frac{5}{8}+2\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$, в) $\left(\frac{3}{17}\cdot\frac{2}{11}\right)\cdot\frac{17}{18}$, г) $\frac{15}{19}\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{38}{45}\right)$.

4. Који производ се добија, већи од нуле, једнак нули или мањи од нуле, ако:
   а) је број негативних чинилаца паран и нема чиниоца 0,
   б) је број негативних чинилаца непаран и нема чиниоца 0,
   в) је један од чинилаца нула.

5. Израчунај производе на два начина: а) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)$, б) $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{14}\right)\cdot 1\frac{3}{4}$.

6. Израчунај на најлакши начин: а) $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$, б) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}$, в) $\frac{11}{12}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$.

7. Базен је напуњен са три цеви за $3\frac{1}{3}$ h. Прва цев испушта $3\frac{1}{5}\text{m}^3$ воде за један сат, а друга $1\frac{1}{10}\text{m}^3$ више од прве. Колико кубних метара воде може да прими базен ако трећа цев испусти исто толико воде за један сат колико испуштају обе цеви заједно?

15. БРОЈНИ ИЗРАЗИ СА РАЦИОНАЛНИМ БРОЈЕВИМА

Активност

Израчунај вредност бројног израза:
а) $(-1)\cdot(-10)+5\cdot(-9):(-1)$,
б) $\{20-3\cdot[8+(-4)]\}:[10+2\cdot(-3)]$.
За сваки израз објасни редослед извршавања назначених операција.

Скенирај код и реши задатке.

Ако бројни израз без заграда садржи само операције првог реда, сабирање и одузимање, или само операције другог реда, множење и дељење, онда се операције извршавају редоследом којим су записане, с лева на десно.

Пример 1

Израчунај бројну вредност израза: а) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1$, б) $-6\cdot 2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2$.

а) $2\frac{3}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-1=\frac{19}{8}-\frac{5}{12}+\frac{7}{16}-\frac{1}{1}=\frac{19\cdot 6}{8\cdot 6}-\frac{5\cdot 4}{12\cdot 4}+\frac{7\cdot 3}{16\cdot 3}-\frac{1\cdot 48}{1\cdot 48}=$

$=\frac{114-20+21-48}{48}=\frac{67}{48}=1\frac{19}{48}$,

б) $-6\cdot 2\frac{1}{2}:(-\frac{3}{4}):2=-6\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{-3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-6\cdot 5\cdot 4\cdot 1}{2\cdot(-3)\cdot 2}=\frac{-120}{-12}=10$.

Ако се операције првог и другог реда јављају у бројном изразу без заграда, онда прво извршавамо операције другог реда множење и дељење, а затим операције првог реда сабирање и одузимање.

Пример 2

Израчунај бројну вредност израза $\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}$.

$\frac{5}{8}-1\frac{5}{6}:\frac{11}{15}=\frac{5}{8}-\frac{\cancel{11}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{15}}{\cancel{11}}=\frac{5}{8}-\frac{5}{2}=\frac{5}{8}-\frac{5\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{5-20}{8}=\frac{-15}{8}=-1\frac{7}{8}$.

Ако бројни израз садржи: мале заграде ( ), средње заграде [ ] и велике заграде { }, онда ћемо прво извршити операције у малим заградама, затим операције у средњим заградама, па великим заградама, и на крају операције ван њих и са њима.

Пример 3

Израчунај бројну вредност израза $\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}$.

$$\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot 2\frac{1}{3}\right\}\cdot 1\frac{1}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{7}\right]\cdot\frac{7}{3}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\left(\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}\right)\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{5+6}{15}\cdot 2\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7}{3}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=$$

$$=\left\{\frac{2}{15}+\left[\frac{7\cdot 5}{15}-\frac{22}{15}\right]\right\}\cdot\frac{6}{5}=\left\{\frac{2+35-22}{15}\right\}\cdot\frac{6}{5}=\frac{15}{15}\cdot\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$$

Задатак 1

Израчунај бројну вредност израза $(-3,5)+\frac{2}{3}\cdot(-4,5)-(-\frac{5}{6})+7,2:(-2,4)$.

Пример 4

Један ученик изводи научни експеримент са растворима соли. Има три бочице са различитим количинама раствора. Прва бочица садржи 1,2 *l* раствора, друга садржи 3/4 *l*, а трећа садржи 0,6 *l* раствора. Сипао је половину раствора у прву бочицу, $\frac{3}{4}$ њене количине у другу бочицу, а из треће бочице је сипао 0,2 *l*.
Колика је количина раствора преостала у све три бочице заједно?

Према условима у задатку, добијамо нумерички израз
$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)$.

Израчунавањем бројне вредности израза добијамо:

$$\left(1,2-\frac{1}{2}\cdot 1,2\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+(0,6-0,2)=\left(\frac{12}{10}-\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{10}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{6}{10}-\frac{2}{10}\right)=$$

$$=\left(\frac{12}{10}-\frac{12}{20}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{6-2}{10}\right)=\left(\frac{12\cdot 2}{10\cdot 2}-\frac{12}{20}\right)+\frac{4}{4}+\frac{4}{10}=$$

$$=\frac{24-12}{20}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{4\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{12}{20}+\frac{20}{20}+\frac{8}{20}=\frac{40}{20}=2.$$

Количина раствора која је остала у све три бочице заједно је 2 *l*.

Задатак 2

За колач се кристи користе $\frac{3}{4}$ шоље шећера, 0,5 шоље уља и $\frac{1}{3}$ шоље млека. Додаје се још 0,2 шоља воде и половина смесе се ставља у калуп. Колико шоља смесе је стављено у калуп?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај вредност бројног израза:

   а) $8\frac{3}{8}-3\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\left(7\frac{1}{2}-5\frac{1}{4}\right)$, б) $-\frac{7}{8}+4{,}5-\left(1\frac{2}{3}+\frac{-6}{2}\right)\cdot 3$,

   в) $\left[\left(3\frac{1}{2}-4\right)\cdot(-1{,}2)-\left(-\frac{7}{10}\right)\right]\cdot 0{,}25$, г) $\left\{-2{,}4+\frac{3}{4}\cdot(-10)-[-1{,}2+(-6)]:0{,}5\right\}+\frac{1}{2}$.

   Објасни редослед извршавања операција.

2. Температура у лабораторији је била 21,5 °C. Прво се повећала за 3,2 °C, а затим се смањила за 0,5 °C, и на крају се повећала за још 0,1 °C. Колика је коначна температура?

3. У бокал се сипа 1,2 *l* воде, затим се додаје $\frac{3}{10}$ *l* млека и 0,25 *l* се одузима од добијене течности. Поступак се понавља два пута.
   Колико литара воде ће бити у бокалу на крају?

4. Марина припрема смути са $\frac{2}{3}$ *l* јогурта, 0,25 *l* сока и $\frac{1}{10}$ *l* воде. Поделила је смути на 3 чаше. Колико течности има у једној чаши?

5. Једна продавница је набавила 12,5 kg нара по цени од 95 денара по килограму. Платила је додатних 235 денара за амбалажу. Ако су продали $\frac{4}{5}$ нара по цени од 124 денара по килограму, да ли је продавница остварила губитак или профит?
   Упутство: Упореди приход са делом расхода који се односе на продату количину.

6. Аутобус на релацији Скопље – Ниш троши у просеку 2,4 литра дизел горива на 10 km. Пут је дуг 210 km. Цена 1 литра дизела је 1,65 евра. Аутобус превози 56 путника. Сваки од њих плаћа по 21,20 €, осим 6 путника који имају карту са попустом од 1,50 €. Колики је укупни приход?

16. ДВОСТРУКИ РАЗЛОМЦИ

Активност

Запиши следеће количнике целих бројева као разломке.
а) 7 : 9 б) 12 : 5 в) 1 : 4

Количнике $5:\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}:(-7)$, $\frac{5}{3}:\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}$, $\frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}$ и $7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}$ можемо да запишемо и као:

$$5:\frac{3}{4}=\frac{5}{\frac{3}{4}},\ \frac{2}{3}:(-7)=\frac{\frac{2}{3}}{-7},\ \frac{5}{3}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}},\ 2\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}},\ \frac{-3}{8}:4\frac{7}{9}=\frac{\frac{-3}{8}}{4\frac{7}{9}},\ 7\frac{3}{5}:1\frac{4}{9}=\frac{7\frac{3}{5}}{1\frac{4}{9}}.$$

Такве изразе називамо двоструким разломцима.

Разломак чији је бројилац или именилац разломак назива се **двоструки разломак.**

Разломачка црта која одваја бројилац од имениоца двоструког разломка назива се **главна разломачка црта.**

Пример 1

Запиши количнике као двоструке разломке:

а) $4:\frac{2}{3}$, б) $\frac{5}{8}:6$, в) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$.

а) $4:\frac{2}{3}=\frac{4}{\frac{2}{3}}$, б) $\frac{5}{8}:6=\frac{\frac{5}{8}}{6}$, в) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}\quad\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}$.

Задатак 1

Представи количнике као двоструки разломак:

а) $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}$, $\frac{4}{7}:\frac{1}{6}$, $\frac{9}{11}:\frac{12}{-5}$, б) $5:\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}:7$ и $3\frac{1}{5}:7$.

У двоструком разломку $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ бројеви су

спољашњи чланови,

а бројеви b и c су **унутрашњи чланови.**

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ унутрашњи чланови, спољашњи чланови

Пример 2

Напиши спољашње и унутрашње чланове двоструког разломка: а) $\frac{\frac{8}{11}}{6}$, б) $\frac{7}{\frac{-2}{9}}$.

Ако су бројилац и именилац двоструког разломка цели бројеви, онда ће представљањем разломка са имениоцем 1, двоструки разломак добити потпун облик, односно имаће четири члана.

а) $\frac{\frac{8}{11}}{6}=\frac{\frac{8}{11}}{\frac{6}{1}}$, Спољшни чланови су 8 и 1, а унутрашњи чланови су 11 и 6.

б) $\frac{\frac{7}{1}}{\frac{-2}{9}}$, Спољшни чланови су 7 и 9, а унутрашњи чланови су 1 и - 2.

Пример 3

Претвори двоструки разломак у прост разломак: а) $\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}}$, б) $\dfrac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}}$.

Двоструки разломак се претвара у прост разломак када се бројилац подели имениоцем.

а) $\dfrac{\frac{6}{7}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{7} : \frac{5}{4} = \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$,

б) $\dfrac{-\frac{5}{9}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{\frac{-5}{9}}{\frac{4}{7}} = \frac{(-5) \cdot 7}{9 \cdot 4} = \frac{-35}{36} = -\frac{35}{36}$.

Двоструки разломак се претвара у прост разломак тако што се производ спољашњих чланова запише као бројилац, а производ унутрашњих чланова као именилац простог разломка:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Задатак 2

Претвори обични разломак у двоструки разломак: а) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}$, б) $\dfrac{-5}{\frac{4}{9}}$, в) $\dfrac{\frac{3}{8}}{5}$.

Пример 4

Претвори обични разломак у двоструки разломак: а) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$, б) $\dfrac{7{,}4}{\frac{4}{5}}$.

а) $\dfrac{3\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

Мешовите бројеве записујемо као неправилне разломке.

б) $\dfrac{7{,}4}{\frac{4}{5}} = \dfrac{\frac{74}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{74 \cdot 5}{10 \cdot 4} = \frac{370}{40} = \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$

Децималне бројеве записујемо у децималним разломцима.

Пример 5

Претвори у прост разломак $\dfrac{2 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}$.

$$\frac{2-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{10-2}{5}}{\frac{4+5}{6}}=\frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{6}}$$

Израчунавамо бројилац и именилац.

$$=\frac{8\cdot 6}{5\cdot 9}=\frac{48}{45}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

Затим претварамо двоструки разломак у прост разломак.

Задатак 3

Претвори у прост разломак: а) $\frac{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}+\frac{1}{3}}$, б) $\frac{2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}{3}$, в) $\frac{\frac{1}{5}-0{,}3}{1-\frac{2}{5}}$.

Задатак 4

Колико врећа од $\frac{1}{8}$ kg може да се напуни са $31\frac{1}{4}$ kg кафе?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Претвори прост разломак у двоструки разломак: а) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$, б) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{5}}$, в) $\frac{-\frac{2}{7}}{4}$, г) $\frac{2}{\frac{3}{2}}$.
2. Претвори прост разломак у двоструки разломак: а) $\frac{1\frac{3}{4}}{2\frac{1}{3}}$, б) $\frac{2{,}4}{\frac{4}{5}}$, в) $\frac{2\frac{2}{5}}{1{,}4}$, г) $\frac{0{,}12}{0{,}15}$.
3. Изврши дате операције:

   а) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{5}$, б) $\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{2}{9}}$, в) $\frac{3}{\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}}$, г) $\frac{2\frac{3}{10}+\frac{4}{15}-\frac{3}{30}}{\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{12}}$.
4. Разлику од разломака $\frac{6}{5}$ и $3\frac{3}{5}$ подели са њиховим збиром.
5. Количник бројева $3\frac{5}{8}$ и 0,2 сабери са количником бројева 0,2 и $3\frac{5}{8}$.
6. Буре у које може да стане $1\frac{5}{8}$ m³ воде напуни се из славине за 3 минута. Са колико воде ћеш напунити буре ако отвориш славину само један минут?

17. СТЕПЕНИ СА ЦЕЛОБРОЈНОМ ОСНОВОМ И СТЕПЕНОВИМ ПОКАЗАТЕЉЕМ - ПРИРОДНИМ БРОЈЕМ

Појам степена

Активност

У 5 рукометних утакмица, укупан број голова за њихов тим постигло је 5 рукометаша који су постигли 5 голова у свакој утакмици.

а) Напиши израз који можеш користити да би израчунао/ла колико је голова тим постигао у свакој од утакмица?

б) Напиши израз који можеш користити да би израчунао/ла колико је голова тим постигао укупно у свих пет утакмица. Како би скраћено написао/ла ове изразе?

За производ од 4 чиниоца једнака броју 3, укратко пишемо:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ читамо „3 на четврти степен“ или „3 на четврти“.

Степенов показатељ 4 показује колико пута се основа 3 множи са самом собом.

Слично томе, имамо да:

$5 \cdot 5 = 5^2$ чита се „5 на степен 2“ или „5 на квадрат“,

$7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ чита се „7 на степен 3“ или „7 на трећи“ или „7 на куб“

Множење једнаких чинилаца доводи до операције **степеновања**.

Производ n једнаких чинилаца, од којих је сваки цео број a, назива се **степен** броја a са **показатељем** природног броја n и означава се са a^n (чита се „a на степен n“ или „a на n-ти“). Број a се назива **основа степена**.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ пута}} = a^n$$

степенов показатељ – природни број

основа степена – цео број

Пошто сваки производ има најмање два чиниоца, према дефиницији за степен, показатељ не сме бити мањи од два. Стога, слажемо се да је степен природног броја a са показатељем 1 да буде сам број a.

$a^1 = a$

У том смислу, на пример, $8^1 = 8$, $(-2)^1 = -2$, $1^1 = 1$, $(-1)^1 = -1$, итд.

Из дефиниције примећујемо да је основа степена чинилац, а показатељ је број чинилаца и показује колико пута се основа степена узима као чинилац.

Пример 1

Напиши производ као степен, а затим га прочитај:

а) $4 \cdot 4 \cdot 4$, б) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$, в) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x)$.

а) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, читамо „4 на трећи степен“ или „4 на трећи“,
б) $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-6)^5$, читамо „минус 6 на пети степен“ или „минус 6 на пети“,
в) $(-x) \cdot (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = (-x)^4$, читамо „минус x на четврти степен“ или „минус x на четврти“

Пример 2

Напиши степен као производ једнаких чинилаца: а) 7^3, б) $(-5)^5$, в) $(-y)^2$.

а) $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$, б) $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$, в) $(-y)^2 = (-y) \cdot (-y)$.

Задатак 1

Прецртај и попуни табелу:

степен	5^2		$(-3)^3$			$(-7)^8$		$(-z)^6$	
основа степена		4		-3	-1		1		$a - b$
степенов показатељ		8		2	5		9		4

Задатак 2

Напиши производ као степен, а затим га прочитај:
а) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, б) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$, в) $x \cdot x \cdot x \cdot x$, г) $(-b) \cdot (-b)$,

Задатак 3

Прочитај степен, а затим га напиши као производ једнаких чинилаца:
а) 6^3, б) $(-9)^2$, в) 0^6, г) 1^2, д) $(-1)^9$, ђ) a^7, е) $(-c)^5$, ж) $(x + y)^4$.

Задатак 4

У популацији од 1 бактерије, број бактерија N се повећава према формули $N = 3^n$, где n представља број сати. Колико ће бактерија бити после 6 сати?

Вредност степена

Активност

Арбен је прославио свој рођендан. Позвао је 3 ученика из свог разреда. Сваки од њих је позвао још 3 ученика из других разреда, а они су позвали још 3 ученика из друге школе.

а) Напиши као степен број ученика који су били позвани на рођенданску прославу.
б) Напиши степен као производ и израчунај производ.
в) Колико је ученика било позвано на рођенданску прославу?

Вредност степена било ког целог броја се израчунава тако што се степен запише као производ, а затим се врши множење.
Израчунавање вредности степена можемо извршити и помоћу калкулатора.

За израчунавање вредности степена помоћу степеновог показатеља 2 (квадрат) и степеновог показатеља 3 (куб) користимо дугмиће во x^2 и x^3.
За израчунавање степена са показатељем који није 2 (квадрат) или 3 (куб), користимо дугмиће x^2 или x^3.

Активност

Запиши: а) квадрате бројева од 1 до 20, б) кубове бројева од 1 до 5.
Покушај да их запамтиш да би их користио при решавању задатака.

Пример 1

Израчунај вредност степена: а) 4^3, б) $(-2)^5$, в) $(-7)^2$, г) 1^4, д) 0^6.

а) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
или на калкулатору
4 x^3 =

Основа степена и степеновог показатеља су позитивни бројеви.
Вредност показатеља је позитиван број.

б) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
или на калкулатору
(–) 2 x^n 5 =

Основа степена је негативан број, а степенов показатељ је наперан број.
Вредност степена је негативан број.

в) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
или на калкулатору
(–) 7 x^2 =

Основа оиказатеља је негативан број, а показатељ је паран број. Вредност показатеља је позитиван број.

г) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, д) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Активност

Напиши експонент и израчунај његову вредност:
а) основа 3 и показатель 6, б) основа -2 и показатель 3, в) основа -4 и показатель 2.
Да ли можеш да изведеш закључак о вези између знака основе и парности степена, са знаком вредности степена?

- Вредност степена позитивног целог броја је позитиван цео број.
- Вредност степена негативног целог броја са парним показатељем је позитиван цео број.
- Вредност степена негативног целог броја са непарним показатељем је негативан цео број.
- Ако је $a = 1$, онда је $a^n=1$ и ако је $a = 0$, онда је $a^n = 0$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Задатак 1

Без рачунања, одреди знак показатеља: а) 13^5, б) $(-26)^{52}$, в) $(-77)^{45}$, г) 1^{44}.

Задатак 2

У физици, при израчунавању усмерене силе (са знаком „−“ за смер улево), користи се израз који садржи силу на квадрат или куб. Ако је сила −3 N, израчунај њену:
а) квадратну вредност, б) кубну вредност.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши основу и степен показатеља степена:
   а) 63, б) $(-9)^2$, в) $(3x)^6$, г) $(-a + 4)k$, д) $(-7p^7)^9$ ђ) 0^{30}
2. Напиши производ као степен:
   а) $9 \cdot 9 \cdot 9$, б) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$,
   в) $(-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x) \cdot (-10x)$, г) $(a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b) \cdot (a - b)$,
   д) $xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy$.
3. Напиши производ степена:
   а) 6^7, б) $(-19)^2$, в) a^3, г) $(-x)^2$, д) $(-c-1)^7$, ђ) $(m^3)^5$
4. Израчунај вредност степена: а) ^{4}, б) $(-6)^3$, в) $(-2)^4$.
   Провери резултат помоћу калкулатора.
5. Провери тачност једначине: а) $(-5)^4 = 5^4$, б) $(-4)^3 = -4,^3$ в) $(-3)^4 = -1 \cdot 3^4$.
6. За које природне бројеве је тачна једначина:
   а) $0^n = 0$, б) $2^n > 0$, в) $1^n = 1$, г) $(-4)^n > 0$, е) $(-7)^n < 0$?
7. У компјутерској симулацији, број дронова се удвостручује после сваке рунде. Колико ће дронова бити после 5 рунди, ако је на почетку било 3 микродрона?
8. У елиминационом шаховском турниру, број играча се преполовљује после сваког одиграног кола. Колико ће играча остати после 4 кола, ако је турнир почео са 128 играча?
9. Жаба се налази у координатном почетку x-осе. После сваког скока, удвостручује растојање од координатног почетка и мења смер (лево, затим десно, па лево, ...). Положај после n скокова је $(-2)^n$ m.
   а) У ком положају је жаба после првог скока, а у ком положају после другог скока?
   б) После колико скокова ће жаба бити лево од координатног почетка, на удаљености од 32 m?

Истраживање

Цртеж 1 приказује коцку $3 \times 3 \times 3$ чија површина је обојена зеленом бојом.

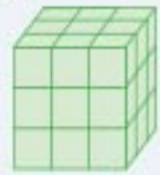
а) Од колико малих коцки димензија $1 \times 1 \times 1$ се састоји коцка?

б) Колико малих коцки је необојено?

в) Колико малих коцки има са 1 обојеном страном, колико са 2 обојене стране и колико са 3 обојене стране?

г) Одговори на иста питања за коцку са димензијама $4 \times 4 \times 4$.

д) Прецртај и допуни табелу.



цртеж 1

коцка	број зидова обојених на малим коцкама			
	0	1	2	3
$2 \times 2 \times 2$				
$3 \times 3 \times 3$				
$4 \times 4 \times 4$				
$5 \times 5 \times 5$				

ђ) Можеш ли да откријеш правило које се односи на број малих коцки и број обојених зидова на малим коцкама? Провери правило за коцку $9 \times 9 \times 9$.

18. КВАДРАТНИ КОРЕН И КУБНИ КОРЕН

Квадратни корен

Активност

Површина квадрата је $16\ cm^2$.

а) Колико центиметара износи једна његова страна?

б) Како израчунавамо страну?

Пример 1

а) Попуни табелу:

n			5		8
n^2	0	9		49	

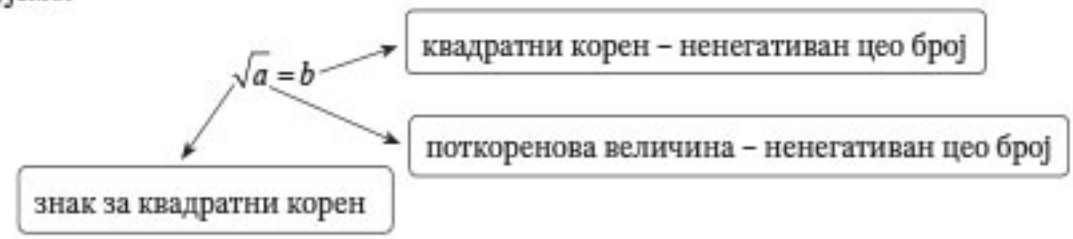
Да би попунили табелу потребно је:

- да пронађемо квадрате за бројеве 5 и 8, ако су 25 и 64, одговарајући,
- да пронађемо бројеве чији су квадрати 0,9 и 49.

Други захтев је обратан од првог, односно, за број 9 треба да пронађемо број чији је квадрат 9. Тај број означавамо са $\sqrt{9}$ и називамо га квадратни корен броја 9. Слично томе имамо да је $\sqrt{49} = 7$ јер је $7^2 = 49$, и $\sqrt{0} = 0$ јер је $0^2 = 0$.

Квадратни корен ненегативног целог броја a (ако постоји) је ненегативан цео број b, такав да је $b^2 = a$. Број a се назива **поткорена вечичина** (или радиканд). Операција израчунавања квадратног корена датог броја назива се **кореновање са кореновим показатељем** 2 или једноставно **кореновање.**

Записујемо:



Читамо: „квадратни корен од a је b"

На калкулаторима постоји посебно дугме за израчунавање квадратног корена, обично означено са $\sqrt{\ }$. Дакле, да бисмо израчунали квадратни корен из 64, уносимо:
6 4 $\sqrt{\ }$ = или $\sqrt{\ }$ 6 4 =.

Активност

Препиши и попуни табелу:

n	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
$\sqrt{n}$										

Потруди се да запамтиш израчунате вредности да би их користио при рашавању задатака.

Задатак 1

Израчунај и провери калкулатором: а) $\sqrt{25}$, б) $\sqrt{64}$, в) $\sqrt{361}$, г) $\sqrt{121}$.

За број 43, на пример, не постоји ненегативан цео број чији је квадрат број 43. Према томе, не постоји квадратни корен броја 43 у скупу ненегативних целих бројева. У таквим случајевима можемо да нправимо **процену** вредност квадратног корена.

Пример 2

Процени вредност $\sqrt{7}$ на једно децимално место.

Прво одређујемо два ненегативна цела броја између чијих се квадрата налази број 7 (*цртеж* 1). Јер

$2^2 < 7 < 3^2$ имамо да је $2 < \sqrt{7} < 3$.

Рачунамо квадрате бројева 2; 2,1; 2,2; 2,3; ... 2,9; 3, редом,
док њихова вредност не пређе 7:

$2^2 = 4$; $2{,}1^2 = 4{,}41$; $2{,}2^2 = 4{,}84$; $2{,}3^2 = 5{,}29$;
$2{,}4^2 = 5{,}76$; $2{,}5^2 = 6{,}25$; $\mathbf{2{,}6^2 = 6{,}76}$; $\mathbf{2{,}7^2 = 7{,}29}$.

Према прорачунима, закључујемо да

$6{,}76 = 2{,}6^2 < 7 < 2{,}7^2 = 7{,}29$, па је зато $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$.

Растојање од броја $2{,}6^2 = 6{,}76$ до броја 7 је 0,24 јединица, док је растојање од броја $2{,}7^2 = 7{,}29$ до броја 7 је 0,29 јединица.

Пошто је $0{,}24 < 0{,}29$, број $2{,}6^2 = 6{,}76$ је ближи броју 7, што значи да је $\sqrt{7}$ ближе броју 2,6.

Према томе $\sqrt{7} \approx 2{,}6$.



цртеж 1

Задатак 2

Процени вредност од $\sqrt{50}$ на једно децимално место. Затим, провери твоју процену калкулатором.

Задатак 3

Панел има 2401 идентичних лампи распоређених у квадратну мрежу.

а) Колико лампи има у једном реду?

б) Ако свака лампа заузима квадрат са страном од 1 cm, колика је дужина странице панела?

Кубни корен

Активност

Запремина коцке је 27 cm^3. Колико центиметара има њена ивица?
Како се израчунава дужина ивице?

Пример 3

Препиши и попуни табелу:

n	3	-4		
n^3			8	-125

Да би попунио/ла табелу, потребно је да:
- пронађеш кубове бројева 3 и -4, а то су бројеви 27 и -64, адекватно,
- пронађеш бројеве чији су кубови 8 и -125.

Други захтев је обрнут од првог, односно, за број 8 потребно је пронаћи број чији је куб 8. То је број 2, који је означен са $\sqrt[3]{8}$ и назива се кубни корен броја 8.

Слично, видимо да је $\sqrt[3]{-125} = -5$ јер је $(-5)^3 = -125$.

Кубни корен (трећи корен) целог броја a је цео број b такав да је $b^3 = a$ и означен је са $\sqrt[3]{a}$. Број a се назива **коренска количина.**
Операција израчунавања кубног корена датог броја назива се **кореновање са коренским показатељем 3** или **кореновање.**

Записујемо:



Читамо: „кубни корен од a је b или трећи корен од a је b“

На калкулаторима постоји посебно дугме за израчунавање кубног корена, обично означено са $\sqrt[3]{\ }$.
Дакле, да бисмо израчунали кубни корен од 125, уносимо
1 2 5 $\sqrt[3]{\ }$ = или $\sqrt[3]{\ }$ 1 2 5 =

Активност

Препиши и попуни табелу:

n	8	27	64	125
$\sqrt[3]{n}$				

Потруди се да запамтиш израчунате вредности да би их користио при решавању задатака.

Задатак 4

Израчунај и провери калкулатором: а) $\sqrt[3]{-27}$, б) $\sqrt[3]{8}$, в) $\sqrt[3]{-125}$, г) $\sqrt[3]{64}$.

Као и код квадратних корена, не постоји цео број чији је куб дати број. Стога, није сваки кубни корен у скупу целих бројева. У таквим случајевима можемо да урадимо **процену** вредности кубног корена.

Пример 4

Процените вредност $\sqrt[3]{30}$ на једно децимално место.

Прво одређујемо два цела броја између чијих кубова се налази број 30. Пошто је

$3^3 < 30 < 4^3$ имамо да је $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

Израчунавамо кубове бројева 3; 3.1; 3.2; 3.3; ... 3.9; 4, редом, док њихова вредност не пређе 30 (*цртеж 2*):

$3^3 = 27$; $\mathbf{3{,}1^3 = 29{,}791}$; $\mathbf{3{,}2^3 = 32{,}768}$.

Према прорачунима, закључујемо да

$29{,}791 = 3{,}1^3 < 30 < 3{,}2^3 = 32{,}768$, па је зато $3{,}1 < \sqrt[3]{30} < 3{,}2$.

Удаљеност од **броја** $3{,}1^3 = 29{,}791$ до броја 30 је 0,209 јединица, док је удаљеност **од броја** $3{,}2^3 = 32{,}768$ до броја 30 2,768 јединица.

Пошто је $0{,}209 < 2{,}768$, број $\mathbf{3{,}1^3} = 29{,}791$ је ближи броју 30, што значи да је $\sqrt[3]{30}$ ближи броју 3,1.

Према томе, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}1$.



цртеж 2

Задатак 5

Процени вредност $\sqrt[3]{10}$ на једно децимално место. Затим, провери своју процену калкулатором.

Задатак 6

У једној фабрици се пакују кутије у облику коцке у велики сандук. Сандук садржи тачно 125 кутија, подједнако распоређених по дужини, ширини и висини. Колико кутија има свака страна сандука?

Израчунавање вредности бројног израза са степеном, квадратним и кубним кореном

Пример 5

Израчунај вредност израза: а) $(-5)^3+15^2$, б) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})$, в) $(4^2+2\sqrt[3]{64}):3$.

Потребно је да проследимо правила:

а) $(-5)^3+15^2=-125+225=100$

б) $4\cdot(\sqrt{16}+\sqrt[3]{-125})=4\cdot(4+(-5))=$
$=4\cdot(-1)=-4$

в) $(4^2+2\cdot\sqrt[3]{64}):3=(16+2\cdot4):3=$
$=(16+8):3=$
$=24:3=8$

- Приликом израчунавања вредности бројног израза са заградама, **операције унутар заграда имају предност.**
- Приликом израчунавања вредности бројног израза операцијама степеновања, кореновања, множења, дељења, сабирања и одузимања, прво вршимо **степеновање и кореновање**, затим **множење и дељење**, и на крају **сабирање и одузимање.**

Задатак 7

Израчунај вредност израза $(2^2-7\sqrt[3]{-125}):(5^2-4\sqrt{9})$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај и провери калкулатором: а) $\sqrt{225}$, б) $\sqrt{144}$, в) $\sqrt{361}$, г) $\sqrt{121}$.
2. Процени вредност $\sqrt{68}$ на једну децималу.
3. Израчунај и провери калкулатором: а) $\sqrt[3]{-64}$, б) $\sqrt[3]{-8}$, в) $\sqrt[3]{125}$, г) $\sqrt[3]{75}$.
4. Матеј је сакупљач маркера. Желео је да их распореди у квадратне рамове (број редова је једнак броју колона).
   а) Први рам је имао 9 редова са 9 маркера у сваком реду. Колико је укупно маркера било у овом раму?
   б) Други рам је имао 121 маркер. Колико редова и колона је имао овај рам, ако је број редова једнак броју колона?
5. Процени вредност $\sqrt[3]{75}$ на једно децимално место.
6. Метална коцка запремине 243 cm^2 се испитује у лабораторији. Колика је ивица коцке?
7. Мале кутије са кредама, које су у облику коцке, поређане су у кабинету из математике. Кутије су поређане тако да формирају велику коцку.
   а) Ако има укупно 125 кутија, колико кутија је наређано на једној страни велике коцке?
   б) Ако свака мала кутија са кредама има запремину 64 cm^3, колика је дужина странице једне кутије?

8. Израчунај вредност израза:

а) $((-5)^3+16^2)\cdot(7^2-2^3)$, б) $(-11)^2-5\cdot(3^3+\sqrt[3]{-27})$, в) $(\sqrt{9}+12^2):\sqrt[3]{27}$.

9. Израчунај вредност израза и провери је калкулатором:

а) $4a-\sqrt[3]{a-8}+\sqrt{a}+2$ за $a=16$, б) $(a+2\sqrt[3]{a-17}-4)^2-\sqrt{a}$ за $a=81$.

19. ПИСАЊЕ БРОЈЕВА У ОБЛИКУ $a\cdot 10^k$, за $a, k\in\mathbb{N}$

У свакодневном животу често се сусрећемо са веома великим бројевима – бројем становника у одређеном граду, земљи или континенту, растојањем међу планетама, бројем бактерија у бактеријској популацији итд. За лакше писање таквих бројева, користимо степене са основом 10.

Степени са основом 10 и експонентом који је природан број

Знамо да десет јединица чини десетицу, десет десетица чини стотину, десет стотина чини хиљаду итд. Десетка, стотина, хиљада итд. се називају и **децималне јединице.**

Активност

Свака децимална јединица може се записати као степен са основом 10.
Прати поступак и упореди број нула у децималној јединици са степеновим показатељем у њеном запису у облику степена са основом 10.

$10=10=10^1$

$100=10\cdot 10=10^2$

$1\,000=10\cdot 10\cdot 10=10^3$

$10\,000=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^4$

$100\,000=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^5$

$1\,000\,000=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^6$

.....

Извесно је да је број нула у децималној јединици једнак степеновом показатељу у његовом запису у облику степена са основом 10,односно

$\underbrace{1000\cdots 0}_{k\text{ нула}}=10^k$, за $k\in\mathbb{N}$.

Пример 1

Напиши децималну јединицу дату у реченици у облику степена са основом 10:

а) Маса Нептуна је око $1\underbrace{000\cdots0}_{26\text{ нула}}$ б) Маса Месечине је око $1\underbrace{000\cdots0}_{23\text{ нуле}}$

а) $1\underbrace{000\cdots0}_{26\text{ нула}}=10^{26}$, б) $1\underbrace{000\cdots0}_{23\text{ нуле}}=10^{23}$.

Задатак 1

Напиши децималну јединицу која је једнака степену назначеном у реченици:

а) Број ћелија у људском телу је 10^{14}. б) Маса Сунца је око 10^{30} kg.

За читање и писање великих бројева, неки степени облика 10^k за $k \in \mathbb{N}$, имају посебна имена. То су степени:

10^3 чита се као **кило** и пише се са k, 10^{9} чита се као **гига** и пише се G,

10^6 чита се као **мега** и пише се са M, 10^{12} чита се као **тера** и пише се T.

Пример 2

Николија је купила компјутерски диск са 1 гигабајтом (GB) меморије. Адор је израчунао да је 1 GB = 10^3 MB.

Да ли је Адор тачно израчунао?

Адор је тачно израчунао, јер је

1 **GB** = 1 000 000 000 B = 1000 · 1 000 000 B = $10^3 \cdot 10^6$ B = **10^3 MB**.

Записивање бројева у облику $a \cdot 10^k$, за $a, k \in \mathbb{N}$

Бројеви који се могу записати као производ природног броја и децималне јединице, могу се записати и као производ природног броја и степена са основом 10.

Број 3 000 000 не можемо да запишемо као степен са основом 10. Зато га прво записујемо као производ два броја, од којих један може да се запише као степен са основом 10, тј.

3 000 000 = 3 · 1 000 000 = 3 · 10^6.

Пример 3

Запиши као производ природног броја и степена са основом 10, број наведен у реченици:

а) Број црвених крвних зрнаца у 1 *l* крви је око $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ нула}}$

б) Пречник видљивог дела Универзума је око $88\underbrace{000\ \ 0}_{25\text{ нула}}$ m

а) $5\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ нула}} = 5\cdot 1\underbrace{000\cdots0}_{12\text{ нула}} = 5\cdot 10^{12}$, б) $88\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ нула}}\,\text{m} = 88\cdot 1\underbrace{000\cdots0}_{25\text{ нула}}\,\text{m} = 88\cdot 10^{25}\,\text{m}$.

Задатак 2

Напиши број дат у реченици као производ природног броја и степена са основом 10:

а) Растојање од Сунца до Нептуна је око $45\underbrace{000\cdots0}_{11\text{ нула}}\,\text{m}$.

б) Маса Сунца је око $1\,99\underbrace{000\cdots0}_{28\text{ нула}}\,\text{kg}$.

Пример 4

Северна Македонија има $180\cdot 10^4$ становника, Грчка има $10\cdot 10^6$ становника, а Бугарска има $69\cdot 10^5$ становника. Која земља има највише становника, а која најмање?

$180\cdot 10^4 = 180\cdot 10^4$
$10\cdot 10^6 = 1\,000\cdot 10^4$
$69\cdot 10^5 = 690\cdot 10^4$

Бројеве записујемо тако да сви степенови показатељи у новим записима буду једнаки на 4 (најмањи међу степеновим показатељима).

$180 < 690 < 1\,000$

Упоређујемо чиниоце испред одговарајућих степена са основом 10 као природним бројевима.

Северна Македонија има најмање становника, а Грчка највише.

Пример 5

Брзина светлости је око 300.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Растојање које светлост пређе за годину дана назива се **светлосна година (ly)**. Колико километара приближно износи једна светлосна година? Запишите светлосну годину као производ два броја, од којих је један степен са основом 10.

1 година = 365 дана 1 дан = 24 сата 1 сат = 60 минута 1 минут је 60 секунди

$1\ \text{ly} \approx 300\,000\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60 = 9460800\,000\,000 = 94\,60^8\cdot 10^8\ \text{km}$.

Једна светлосна година је око $94\,608\cdot 10^8$ километара.

Задатак 3

Супер рачунар обрађује 25 000 000 инструкција у секунди.

а) Напиши број инструкција као производ природног броја и степена са основом 10.

б) Упореди брзину суперрачунара са брзином обичног рачунара који обрађује 25 000 инструкција у секунди.

Заокруживање бројева на најближу децималну јединицу 10^k, $k \in \mathbb{N}$

Записивање бројева у облику производа природног броја и степена са основом 10 може олакшати поступак заокруживања бројева на најближу децималну јединицу, тј. на најближу десетицу, стотину, хиљаду итд.

Активност

1. Користећи бројевну праву, заокружи бројеве 342, 367, 362, 347:
   а) на најближу десетицу, б) на најближу стотину.

Које од заокруживања је заокруживање са вишком, а које са мањком?

2. Ема и Адмир су добили задатак да припреме презентацију о поступку заокруживања природних бројева, без коришћења бројне праве.
Ема је на свом хамеру изложила правила:

1) Ако је цифра десно од **цифре на коју заокружујемо**:
   - 5, 6, 7, 8 или 9, онда се цифра на коју заокружујемо повећава за 1. Кажемо да **заокружујемо са вишком**.
   - 0, 1, 2, 3 или 4, онда цифра на коју заокружујемо остаје непромењена. Кажемо да **заокружујемо са мањком**.
2) Цифре **десно од цифре на коју заокружујемо** замењујемо цифром 0.
3) Цифре **лево од цифре на коју заокружујемо** остају непромењене, осим када преносимо при заокруживању са вишком.

Нарочито, ако је цифра на коју заокружујемо 9 и заокружујемо са вишком, онда је замењујемо цифром 0, а прва цифра лево од ње се повећава за 1. Ако је цифра лево такође 9, преношење се наставља на лево док се не повећа цифра мања од 9.

Адмир је указао на неколико примера на свом хамеру:

Број 825 заокружен на најближу десетицу је број 830. Пишемо $825 \approx 830$.	Број 1237 заокружен на најближу стотину је број 1200. Пишемо $1237 \approx 1200$.
Број 962 заокружен на најближу хиљаду је број 1000. Пишемо $962 \approx 1000$.	Број 984 заокружен на најближу стотину је број 1000. Пишемо $984 \approx 1000$.

Да ли је Емина и Адмирова презентација тачно урађена?

Поступак заокруживања природног броја n на најближу децималну јединицу 10^k, $k \in \mathbb{N}$, састоји се од проналажења природног броја који има k нула и који је најближи броју n.

Пример 6

Заокружите број:
а) 1 430 000 на најближу децималну јединицу 10^5,
б) 22 372 000 000 на најближу децималну јединицу 10^8,
в) 1 950 000 000 000 на најближу децималну јединицу 10^{11}.

а) $1\,430\,000 \approx 1\,400\,000$
Заокруживање се врши са мањком.

- Цифра 4 има месну вредност $4 \cdot 10^5$, па је цифра на коју заокружујемо 4.
- Десно од цифре 4 је цифра 3, па цифра 4 остаје непромењена.
- Цифре лево од цифре 4 остају непромењене, а цифре десно од цифре 4 се замењују цифром 0.

б) $22\,372\,000\,000 \approx 22\,400\,000\,000$
Заокруживање је са вишком.

- Цифра 3 има месну вредност $3 \cdot 10^8$, па је цифра на коју заокружујемо 3.
- Десно од цифре 3 налази се цифра 7, па се цифра 3 замењује цифром 4.
- Цифре лево од цифре 3 остају непромењене, а цифре десно од цифре 3 се замењују цифром 0.

в) $1\,950\,000\,000\,000 \approx 2\,000\,000\,000\,000$
Заокруживање је са вишком.

- Цифра 9 има месну вредност $9 \cdot 10^{11}$, па је цифра на коју заокружујемо 9.
- Десно од цифре 9 налази се цифра 5, па се цифра 9 замењује цифром 0 и испред ње дописујемо 1.
- Цифре десно од цифре 9 замењујемо цифром 0.

Задатак 4

У лабораторији је припремљено 564 300 000 молекула новог једињења за експеримент.
а) Запиши број молекула као производ природног броја и степена са основом 10.
б) Заокружи број молекула на најближу децималну јединицу 10^6.
в) Заокружи број молекула на најближу децималну јединицу 10^7.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Напиши број као производ природног броја и степена са основом 10:
   а) 40 000 000, б) 5 000 000 000, в) 600 000 000 000.
2. Један грам земље садржи око 1 000 000 000 бактерија. Напиши број бактерија у облику степена са основом 10.
3. У болници се за годину дана припреми 3 200 000 доза вакцина.
   а) Напиши број доза у облику производа природног броја и степена са основом 10.
   б) Објасни зашто је облик под а) лакши за коришћење од датог облика.

4. У великом супермаркету постоји 120000 лименки сока. Власник жели да запише број лименки на начин на који може лакше да се упоређује са другим супермаркетима. Напиши број лименки као производ природног броја и степена чија је основа 10.

5. Табела приказује број становника у неколико земаља. Подредите бројеве од најмањег до највећег.

држава	број становника
Индија	$1\,420 \cdot 10^6$
САД	$335 \cdot 10^6$
Немачка	$84 \cdot 10^6$
Малта	$52 \cdot 10^4$
Исланд	$38 \cdot 10^4$

6. Машина изврши 10.000 аритметичких операција у једној секунди.
   а) Наћи број аритметичких операција које машина изврши за један сат.
   б) Запиши тај број као степен са основом 10.

7. Велики град производи 4 275 000 kg отпада дневно.
   а) Напиши количину отпада као производ природног броја и степена са основом 10.
   б) Представи количину отпада произведеног за један месец као производ природног броја и степена са основом 10.

8. Заокружи број:
   а) 44 162 000 000 000 на најближу декималну јединицу 10^{12},
   б) 78 000 000 000 000 на најближу декималну јединицу 10^{13},
   в) 3 989 000 000 000 000 на најближу декималну јединицу 10^{15}.

9. Велика фабрика је произвела 426 000 000 000 батерија за једну годину.
   а) Напиши број произведених батерија као производ природног броја и степена са основом 10.
   б) Заокружит број батерија на најближу декималну јединицу 10^{10}.
   в) Заокружи број батерија на најближу декималну јединицу 10^{11}.

Истраживање

Пронађи на интернету друге примере великих бројева из природних наука и запиши их као производ природног броја и декималне јединице.

20. МНОЖЕЊЕ И ДЕЉЕЊЕ СТЕПЕНА СА ИСТИМ ОСНОВАМА

Множење степена са истим основама

Активност

Размотри и објасни како се множе степене са истом основом:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3}$.

Наведи кораке у којима се користе дефиниција степена и асоцијативни закон множења.

Правило важи за производ било која два степена са истим основама.

Производ два степена са истом основом једнак је степену са истом основом, а експонент степена једнак је збиру експонената тих степена, односно.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m},\ a \in \mathbb{Z},\ n, m \in \mathbb{N}$.

Пример 1

Напиши производ у облику степена: а) $8^2 \cdot 8^6$, б) $(-3)^3 \cdot (-3)$, в) $x^m \cdot x^n$.

а) $8^2 \cdot 8^6 = 8^{2+6} = 8^8$, б) $(-3)^3 \cdot (-3) = (-3)^3 \cdot (-3)^1 = (-3)^{3+1} = (-3)^4$, в) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Можемо да видимо да правило важи и за производ од више степена са једнаким основама. Наиме, због асоцијативног закона сабирања и асоцијативног закона множења, имамо

$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{(m+n)+k} = a^{m+n+k}$.

Приликом множења степена са истом основом, основа остаје иста, а показатељи се сабирају.

Пример 2

Напиши производ у облику степена:

а) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3$, б) $(-5)^7 \cdot (-5)^2\ (-5)^5 \cdot (-5)^3$, в) $y^k \cdot y^n \cdot y^p$.

а) $6^2 \cdot 6^6 \cdot 6^3 = 6^{2+6+3} = 6^{11}$, б) $(-5)^7 \cdot (-5)^2\ (-5)^5 \cdot (-5)^3 = (-5)^{7+2+5+3} = (-5)^{17}$,

в) $y^k \cdot y^n \cdot y^p = y^{k+n+p}$.

Задатак 1

Напиши производ у облику степена:
а) $10^4 \cdot 10^6$, б) $(-3)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3$, в) $a^5 \cdot a^6$, г) $(x-1)^4 \cdot (x-1) \cdot (x-1)^7 \cdot (x-1)^{12}$.

Пример 3

Поједностави израз: а) $9x^7 \cdot 3x^3$, б) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7$.

а) $9x^7 \cdot 3x^3 = (9 \cdot 3)\, x^{7+3} = 27x^{10}$,
б) $0{,}3(y+1)^5 \cdot 0{,}4(y+1)^4 \cdot 0{,}1(y+1)^7 = (0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1)(y+1)^{5+4+7} = 0{,}012(y+1)^{16}$.

Задатак 2

Поједностави израз: а) $9x^7 \cdot 3x^3$, б) $5a^7 \cdot 3a \cdot 0{,}1a^3$.

Пример 4

Цвећарка Мила сади 2^2 цвета у једну саксију. Током дана посадила је 2^3 саксије. Колико је цветова укупно посадила у току дана?

Запишимо решење као у облику степена, а да затим израчунамо његову вредност.
Имамо

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Цвећарка Мила је током дана посадила 32 цвета.

Задатак 3

Фабрика је произвела 2^5 конзерви првог дана. Колико ће конзерви произвести за 4 дана, ако се производња удвостручује сваког дана?

Дељење степена са једнаким основама

Активност

Открij правило за дељење степена са једнаким основама према израчунавању:

$$3^6 : 3^2 = \frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4 = 3^{6-2}$$

Количник два степена са једнаким основама различитим од нуле, код којих је степенов показатељ дељеника већи од степеновог показатеља делиоца, једнак је степену са истом основом и једнаким степеновим показатељем једнак разлици показатеља дељеника и делиоца тих степена, односно

$$a^n : a^m = a^{n-m},\ a \in \mathbb{Z},\ a \neq 0,\ n, m \in \mathbb{N} \text{ и } n > m.$$

Пример 5

Запиши количник као степен: а) $11^8 : 11^3$, б) $(-x)^{12} : (-x)^4$.

а) $11^8 : 11^3 = 11^{8-3} = 11^5$, б) $(-x)^{12} : (-x)^4 = (-x)^{12-4} = (-x)^8$.

Задатак 4

Запиши количник као степен:
а) $5^6 : 5^4$, б) $(-4)^{12} : (-4)^7$, в) $b^{72} : b^{60}$, г) $(x-y)^7 : (x-y)^3$.

Задатак 5

Које од следећих једначина су тачне:
а) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$, б) $3^5 \cdot 3^3 = 3^2$, в) $7^9 : 7^2 = 7^7$, г) $x^x \cdot x^8 = x^{x-8}$, д) $m^3 : m = m^3$?
Образложи одговор.

Пример 6

Упрости израз: а) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5)$, б) $\frac{a^9}{a^4 \cdot a^2}$.

а) $x^{12} : (x^3 \cdot x^5) = x^{12} : x^{3+5} = x^{12} : x^8 = x^{12-8} = x^4$, б) $\frac{a^9}{a^4\ a^2} = \frac{a^9}{a^{4+2}} = \frac{a^9}{a^6} = a^{9-6} = a^3$.

Задатак 6

Упрости израз: а) $s^3 \cdot s^4 \cdot s^2 : s^5$, б) $n^4 \cdot n^1 : n^2$, в) $r^{16} : r^4 \cdot r^3 \cdot r^5$.

Задатак 7

Израчунај вредност израза: а) $(2^{14} \cdot 2^2) : 2^9$, б) $\frac{3^{14}}{3^7 \cdot 3^4}$, в) $\frac{8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (2^5 : 4)}$.

Пример 7

У једној фабрици се пакују 34 кутије слаткиша у току дана. Ноћу фабрика пакује 3^2 кутије слаткиша. Колико пута више кутија слаткиша фабрика спакује у току дана него ноћу?

Хајде да запишемо решење у облику степена и да израчунамо његову вредност:
$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$.
Фабрика пакује 9 пута више кутија слаткиша у току дана него ноћу.

Пример 8

Раствор натријума (Na) се чува у хемијској лабораторији у којој концентрација честица расте и опада у зависности од услова. Научник је записао израз за концентрацију раствора.

$C = x^5 \cdot x^8 : x^4.$

Поједноставите - упростите израз за концентрацију раствора.

Сви степенци имају основу x, тако да можемо применити правила за множење и дељење степена са истом основом.

Приликом множења степена са истом основом, показатељи се сабирају:

$C = x^5 \cdot x^8 : x^4 = x^8 : x^4.$

Приликом дељења степена са истом основом, показатељи се одузимају:

$C = x^8 : x^4 = x^4.$

Након поједностављења, за концентрацију раствора добијамо $C = x^4$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Помножи степене: а) $6^5 \cdot 6^6$, б) $q^3 \cdot q^{42} \cdot q^2$, в) $t^4 \cdot t^1 \cdot t^2$.

2. Подели степене: а) $2^9 : 2^7$, б) $\frac{x^8}{x^3}$, в) $y^{17} : y^6$, г) $(a-3b)^{19} : (a-3b)^{12}$.

3. Запиши производ у облику степена:
   а) $5^4 \cdot (-5)^6$, б) $-x \cdot x^2 \cdot (-x)^3$, в) $(3-a)^2 \cdot (a-3)^6$.

4. Запиши израз у облику степена: а) $2^{41} - 2^{40} - 2^{39}$, б) $3^{51} : (2 \cdot 3^{40} + 7 \cdot 3^{40})$.

5. Упрости – поједностави израз:
   а) $15x^8 \cdot 3x^2$, б) $32y^4 : 8y^2$, в) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$, г) $(y^7 + 2y^2z) : y$.

6. Израчунај вредност израза: а) $(7^4 \cdot 7^2) : 7^5$, б) $\frac{3^6 \cdot 3^{12}}{27 \cdot 3^{14}}$, в) $\frac{2^{12}}{2^6 \cdot 2^3} : \frac{16 \cdot 2^3}{(2^3 : 4) \cdot 2^4}$.

7. Израчунај: а) $x^5 \cdot x^2$, за $x = -2$ и $x = 2$, б) $y^7 : y^4$, за $y = -3$ и $y = 3$.

8. За коју вредност n је тачна једначина:
   а) $2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+n}$, б) $a^3 \cdot a^4 = a^{n+2}$, в) $4^5 : 4^3 = 4^{5-n}$, г) $(x+1)^8 : (x+1)^n = (x+1)^2$?

9. Број бактерија у популацији бактерија се удвостручује сваких 30 минута. Колико ће бактерија бити у популацији после 3 сата, ако је на почетку било 4 бактерије?

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. У скупу $A = \{2, 4, 8, 10\}$ дата је релација R: x је 2 пута веће од y.
   Представит релацију:

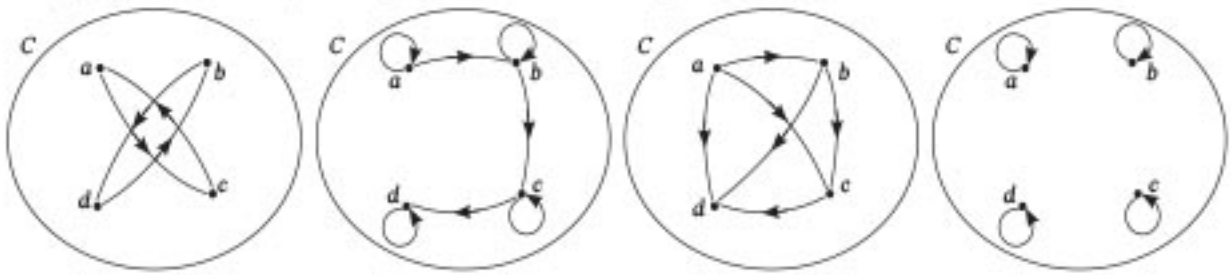
   а) у табеларном облику, б) у описном облику, в) графом.

2. За сваки писмени тест из математике, Мила је учила различит број сати. Ставила је у релацију сате учења са бројем освојених поена. Подаци су дати у табели.

дан у седмици	време учења (у сатима)	освојени поени
понедељак	1 h	60 поена
уторак	2 h	70 поена
среда	1,5 h	65 поена
четвртак	3 h	85 поена
петак	2,5 h	75 поена

   Објасни везу између времена учења и освојених поена. Представи овако одређену релацију на следећи начин: а) графом, б) табеларно.

3. Које од релација R^1, R^2, R^3 и R^4 у скупу $C = \{a, b, c, d\}$ на слици 1 су:
   а) рефлексивне, б) симетричне, ц) антисиметричне, г) транзитивне?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3 Релација R_4

цртеж 1

4. У скупу ученика из VIII разреда, дате су релације:
   R_1: „... има исто презиме са...“ и R_2: „... има име са мањом дужином од...“.
   а) Без представљања релација графом, провери својства: рефлексивност, симетрију, антисиметрију и транзитивност.
   б) Која од њих је релација еквиваленције, а која релација подређивања?

5. У спортској секцији, ученици размењују опрему за вежбање.
   Познато је да је:
   Дамјан позајмио лопту Еми; Ема је позајмила коноп за вежбање Луки;
   Лука је позајмио обруч Мили; Мила је позајмила коноп за вежбање Дамјану.
   а) Представи релацију R_1: „... позајмио/ла је опрему ...“, међу ученицима на табеларан начин и графом.
   б) Провери да ли је релација рефлексивна, симетрична и транзитивна.
   в) Да ли релација R_2: „... може да добије реквизит низом позајмљивања од ...“ (на пример, ако је Дамјан позајмио Еми, а Ема Луки, онда Дамјан индиректно можда добије реквизит од Луке) релација еквиваленције?

6. Наведи пример који задовољава исказ:

а) Сви природни бројеви су цели бројеви, али сви цели бројеви нису нужно природни бројеви.

б) Сви цели бројеви су рационални бројеви, али сви рационални бројеви нису нужно цели бројеви.

7. Напиши понављајући децимални број разломком:

а) 0,(9); б) 0,(143); в) 3,1(5); г) 3,45(67); д) 80,23(54).

8. У канистеру се налази 3.(4) *l* воде. Запиши количину воде у литрима разломком.

9. У продавници, *l* млека кошта 1,2(5) €.

а) Запиши цену млека разломком.

б) Колико ће Астрит платити за 5 *l* млека?

в) Астрит има ограничен буџет од 10 €. Колико литара млека може да купи да би максимално искористила свој буџет?

10. У уметничкој радионици, 0,4 од укупних боја је црвена, $\frac{3}{10}$ је плава боја и 30% је жута боја.

а) Која је боја највише заступљена?

б) Направи табелу у којој ћеш сваку количину боје записати разломком, децималним бројем и процентом.

11. У неком експерименту, је направљен раствор. 80 g соли се раствори у 400 ml воде. Затим се дода још 100 ml воде и још 40 g соли.

а) Израчунај проценат соли у почетном раствору.

б) Израчунај нови проценат соли након додавања воде и соли.

в) Да ли се концентрација соли повећала или смањила и за колико процената?

г) Изрази нову концентрацију као разломак од укупног раствора.

12. Један кошаркаш на почетку сезоне постиже просечно 20 поена по утакмици. У другој половини сезоне повећава своју ефикасност за 25%, а у последњој половини део смањује за 10% од те повећане вредности. Колико поена постиже у просеку на крају сезоне?

13. Поједностави – упрости скалу:

а) 0,25 m : 75 cm : 0,5 dm, б) 3 kg : 0,75 kg : 250 g, в) 3 l : 1200 ml : 0,6 l.

14. Милан путује од куће до школе за:

1 сат и 14 минута, ако иде пешице, 30 минута, ако вози бицикл,

18 минута, ако користи јавни превоз.

Запиши и поједностави размер времена, иде пешице према вози бицикл према користи јавни превоз.

15. Унутрашњи углови једног четвороугла су у размеру 7 : 3 : 5 : 3.

Израчунај величину највећег угла.

16. Да би се добило чоколадно млеко, размер млека и воде према отопљеној чоколади треба је 3 : 2 : 1.

Познато је да Игор има 15 *l* млека.

а) Колико литара воде и колико литара отопљене чоколаде му је потребно?

б) Колика је укупна количина чоколадног млека?

17. Нина треба да помери 30 коцки на растојање од 5m. Нина помера једну коцку за 6 секунди. Колико јој је времена потребно да помери 30 коцки ако помера:
а) 2 коцке одједном, б) 3 коцке одједном?

18. Менсур вози аутобус брзином од 80 km/h и прелази своју руту за 5 h и 20 min. Томислав вози аутомобил брзином од 100 km/h и прелази своју руту за 3 hи 10min. Који од њих је прешао дужи пут?

19. Израчунај:
а) $\frac{1}{2}$ од 36, б) $\frac{1}{4}$ од 72, в) $\frac{1}{2}$ од 36, г) 0,1 ·180.

20. У посуди је било $1\frac{1}{4}$ kg брашна. Егзона је потрошила 0,7 kg за колаче.
Затим је Илир додао још 1,2 kg брашна. Колико брашна сада има у посуди?

21. Хемичар припрема раствор у лабораторији. У чаши је било 2,5 *l* раствора.Приликом загревања, 0,75 *l* је испарило, а хемичар је затим додао још $1\frac{1}{4}$ *l* свежег раствора.
а) Колика је укупна количина раствора у чаши након свих промена?
б) Ако хемичар жели да има 4 *l* раствора, колико још *l* треба да дода или одузме?

22. На часу географије, ђаци проучавају реке и њихове просечне проточне количине (проток).
Река А има просечан проток од 320,5 m^3/s, а река Б има просечан проток од 145,25 m^3/s. Инжењери планирају да изграде заједничку брану. Одлучили су да у брану иде $\frac{3}{4}$ од протока реке А и 85% од протока реке Б.
а) Колики ће бити нови проток реке А?
б) Колики ће бити нови проток реке Б?
в) Колики ће бити укупан проток који ће се улити у брану са обе реке?
г) За колико је већи проток реке А у односу на реку Б после промена?

23. Израчунај на најлакши начин:
а) $\left(5\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}-6\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5}$, б) $-4\cdot\frac{-5}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot(-3)$.

24. Израчунај вредност израза: $\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}+1\frac{2}{3}-4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{36}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{13}\right)\right]-\left[(0,5-2,5)\right]\cdot\frac{1}{2}$.

25. Једна продавница воћа је набавила 25 kg јабука по цени од 1,8 € по килограму. За транспорт и паковање плаћено је додатних 12,5 €. Након тога продавница је продала $\frac{3}{5}$ јабука по цени од 2,4 € по килограму, а преостале је продала са попустом од 0,3 €/kg од првобитне цене. Колики је профит остварила продавница након продаје јабука?

26. Претвори у прост разломак:
а) $\frac{1:2\frac{1}{15}}{3\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{3}}:\frac{4\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{13}}{5:1\frac{7}{8}}$, б) $\frac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}:\frac{3}{23}}{6\frac{1}{4}:\frac{5}{7}\cdot 5\frac{3}{4}}\cdot\frac{5\frac{1}{7}\cdot 7}{7\frac{1}{5}:\frac{9}{31}}$.

27. Колико пута ће се точак бицикла окренути на стази од 51 m, ако је обим точка $1\frac{1}{4}$ m ?

28. Алге у једном акваријуму се удвостручују сваких 6 сати. Колико ће алги бити у акваријуму после 24 сата, ако је на почетку било 5 алги?

29. Један робот креће из координатног почетка на x-осом. При сваком покрету дуплира се растојање од координатног почетка и мења смер наизменично с десна према лево. Његов положај након n покрета износи $(-2)n$ метара.

а) У којој позицији је робот након првог покретања, а у којој позицији је након другог покретања?

б) После колико покретања ће робот бити лево од координатног почетка, на растојању од 8 m?

30. Процени на једну децималу вредност: а) $\sqrt{51}$, б) $\sqrt[3]{100}$.
Затим, провери своју процену помоћу калкулатора.

31. Научници истражују малу металну коцку која се користи као део батерија за електричне аутомобиле. Коцка има запремину од 216 cm^3.

а) Колика је дужина странице металне коцке?

б) Колика је површина металне коцке?

в) У лабораторији се праве минијатурне копије исте коцке са страницом која је 6 пута мања. Колика је запремина минијатурне коцке?

32. Израчунај вредност израза:

а) $3 \cdot 5^2 + 4^3 - 5 \cdot 7^3$, б) $(-2)(-3)(-4)^2 - (-1)^5(-2)^2$,

в) $100 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot \sqrt{169} \cdot (-3)^3 - 0,3\sqrt[3]{27}$, г) $\left(2^3 + \sqrt{256}\right) : \left((-3)^5 - \sqrt[3]{125}\right)$.

Провери калкулатором.

33. У табели су дата растојања планета од Сунца.

а) Запиши растојања као производ природног броја и степена са основом 10.

б) Поређај растојања од најмањег до највећег.

планета	растојање-удаљеност до Сунца у km
Меркур	58 000 000
Венера	108 000 000
Марс	228 000 000
Земља	150 000 000
Јупитер	780 000 000
Сатурн	1 430 000 000
Уран	2 870 000 000
Нептун	4 500 000 000

34. Годишњи буџет једне земље износи 87 456 000 000 денара. Заокружи га на најближу децималну јединицу 10^9.

35. Поједностави израз:

а) $(x^{32} : x^6) \cdot (x^7 : x^3) \cdot (x^7 : x^3 \cdot x^9)$, б) $\frac{a^7 \cdot a^8 : a^3}{3a^5}$.

36. Једна фабрика производи металне коцке. Свака коцка има дужину ивице 2 dm.

а) Напиши то у облику етепена, а затим израчунај површину две стране од коцке.

б) Напиши то у степеном облику, а затим израчунај површину четири стране од коцке.

Тема 2:

ГЕОМЕТРИЈА

Резултати учења:

Проучавајући ову тему, оспособићеш се да:

- Решаваш проблеме користећи: углове са међусобно паралелним катетама, углове са међусобно нормалним крацима, периферне и централне углове над истим кружним луком, делове круга и круга.
- Примењујеш подударност троугла у решавању проблема из свакодневних контекста.
- Користиш карактеристике и својства 2Д облика (троугла и четвороугла) у решавању проблема са конструкцијама и Питагорином теоремом.
- Демонстрираш разумевање полиедра, правилног полиедра и односа између броја страна, ивица и темена у полиедрима.
- Трансформишеш 2Д облике комбиновањем трансформација осне симетрије, транслације и ротације

1. УГЛОВИ СА МЕЂУСОБНО ПАРАЛЕЛНИМ КРАЦИМА И УГЛОВИ СА НОРМАЛНИМ КРАЦИМА

Углови са међусобно паралелним крацима

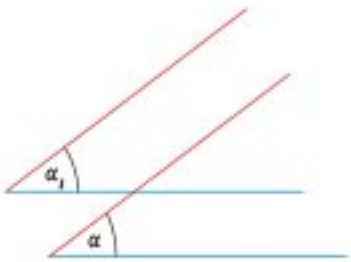
Активност

1. На паркингу су нацртане паралелне линије које означавају паркинг места као на *слици* 1. Какав је узајамни положај одговарајућих кракова углова 1 и 2?

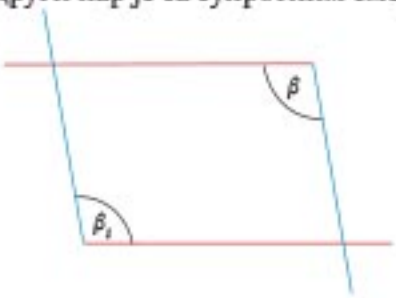


слика 1

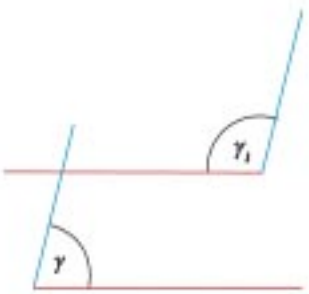
Углови α и α_1 на слици 1а имају међусобно паралелне краке са истим смеровима.
Углови β и β_1 на слици 1б имају међусобно паралелне краке са супротним смеровима.
Углови γ и γ_1 на слици 1в имају међусобно паралелне краке. У овом случају, један пар кракова је са истим смеровима, а други пар је са супротним смеровима.



цртеж 1а



цртеж 1б



цртеж 1в

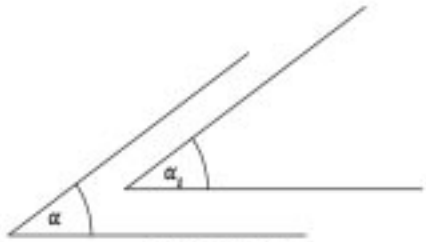
Парови углова α и α_1, β и β_1, γ и γ_1 су примери **углова са међусобно паралелним крацима.**

Задатак 1

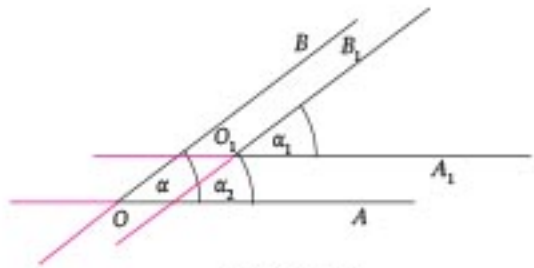
Нацртај два угла са међусобно паралелним крацима:
а) са истим смеровима, б) са супротним смеровима,
в) један пар кракова је са истим смеровима, а други пар је са супротним смеровима.

Пример 1

На цртежу 2а, углови α и α_1 имају међусобно паралелне краке, са истим правцима. Пажљиво их измери, а затим упореди њихове величине. Шта примећујеш? Можеш ли доћи до истог закључка без мерења?



цртеж 2а

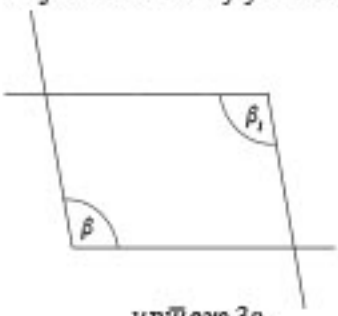


цртеж 2б

Након мерења, си сигурно утврдио/ла да су дати углови једнаки, односно да је $\alpha = \alpha_1$. Да бисмо без мерења утврдили да је $\alpha = \alpha_1$, продужићемо краке углова до правих (*цртеж* 2б). Тада примећујемо да:
$OB \parallel O_1B_1$ и OA су трансверзале, па је $\alpha = \alpha_2$ (као подударни углови);
$OA \parallel O_1A_1$ и O_1B_1 су трансверзале, па је $\alpha_2 = \alpha_1$ (као подударни углови);
Из $\alpha = \alpha_2$ и $\alpha_2 = \alpha_1$ добијамо да је $\alpha = \alpha_1$

Пример 2

Објасни зашто су углови β и β_1 на цртежу 3а једнаки.



цртеж 3а

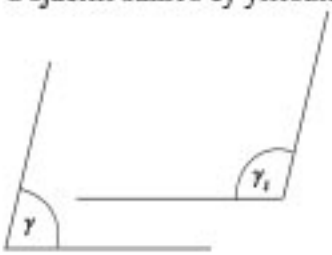


цртеж 3б

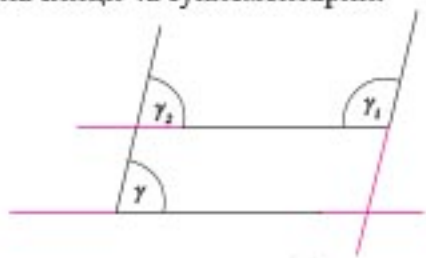
Углови β и β_2 имају међусобно паралелне краке са супротним смеровима. Ако продужимо краке углова на правих (*цртеж* 3б), примећујемо да је:
$\beta = \beta_2$ (као подударни углови) и $\beta_2 = \beta_1$ (као наизменични углови).
Из $\beta = \beta_2$ и $\beta_2 = \beta_1$ следи да је $\beta = \beta_1$

Пример 3

Објасни зашто су углови γ и γ_1 на слици 4а суплементарни.



цртеж 4а



цртеж 4б

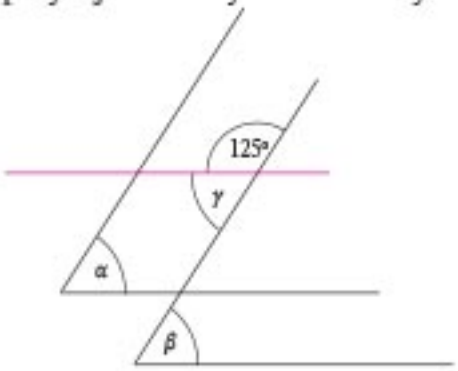
Углови γ и γ_1 имају међусобно паралелне краке, један пар кракова је са истим правцима, а други пар краква је са супротним правцима.

Ако продужимо краке углова до правих линија (Сл. 4б), примећујемо да:
$\gamma = \gamma_2$ (као подударни углови) и $\gamma_2 + \gamma_1 = 180°$ (су суплементни углови као супротни углови).
Из $\gamma = \gamma 2$ и $\gamma 2 + \gamma 1 = 180°$ добијамо да је $\gamma + \gamma 1 = 180°$, тј. γ и $\gamma 1$ су суплементни углови.

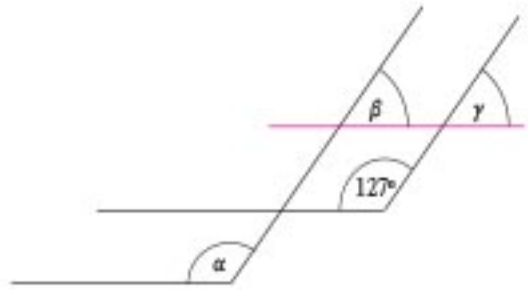
Углови са међусобно паралелним страницама су:
- једнаки, ако су два пара кракова у истом смеру или у супротним смеровима,
- комплементарни, ако је један пар кракова у истом смеру, а други пар у супротном смеру.

Задатак 2

Израчунај величину непознатих углова на цртежу 5а и цртежу 5б.



цртеж 5а



цртеж 5б

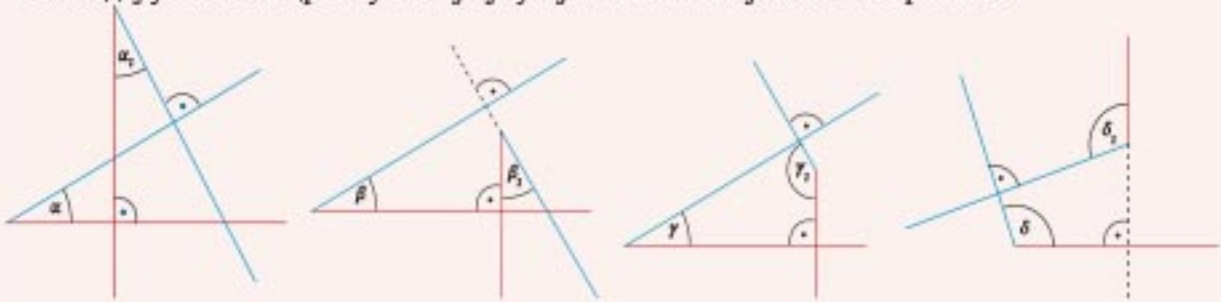
Задатак 3

План града приказује две паралелне улице: улицу А и улицу Б. Улица Дијагонала сече обе улице и на раскрсници са улицом А захвата угао од 120°.
На раскрсници улице Б и Дијагонала формирају се четири угла. а) Нацртај део плана са три улице и означи углове.
б) Израчунај величину углова на раскрсници са улицом Б и Дијагоналом.

Углови са међусобно нормалним страница

Активност

Разгледај углове на цртежу 6. Који је узајамни положај њихових кракова?



цртеж 6

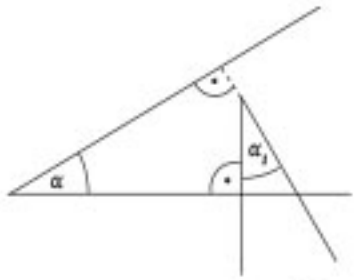
Прецртај и попуни табелу.

парови угова	величина углова	поређење углова (једнаких или различитих)	збир углова
α и α_1			
β и β_1			
γ и γ_1			
δ и δ_1			

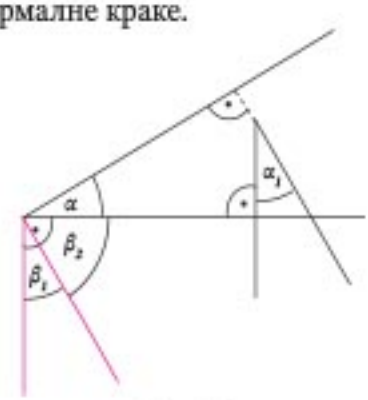
Парови углова α и α_1, β и β_1, γ и γ_1, δ и δ_1 разгледани у активности су примери **углова са међусобно нормалним крацима**.

Да бисмо утврдили везу између величине два угла са међусобно нормалним крацима, размотрићемо следећа два случаја:

1. На цртежу 7а, углови α и α_1 имају међусобно нормалне краке.



цртеж 7а



цртеж 7б

На цртежу 7б, угао β_1 је нацртан са теменом попут угла α, тако да α_1 и β_1 имају међусобно паралелне краке са истим правцима. Примећујемо да:

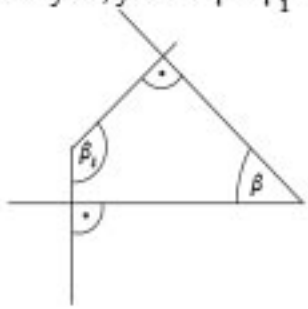
$\alpha_1 = \beta_1$ (као углови са међусобно паралелним крацима и истим правцима).

$\alpha + \beta_2 = 90°$ и $\beta_1 + \beta_2 = 90°$;

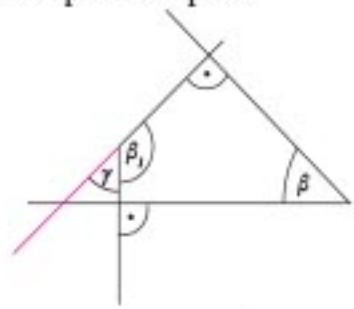
Из $\alpha = 90° - \beta_2$ и $\beta_1 = 90° - \beta_2$ добијамо да је $\alpha = \beta_1$;

Из $\alpha = \beta_1$ и $\alpha_1 = \beta_1$ добијамо да је $\alpha = \alpha_1$.

2. На цртежу 8а, углови β и β_1 имају међусобно нормалне краке.



цртеж 8а



цртеж 8б

На слици 8б, угао γ је нацртан са теменом као углом β_1, тако да γ и β имају међусобно нормалне краке. Примећујемо да:

$\beta = \gamma$ (углови са међусобно нормалним крацима, као у претходном случају),

$\gamma + \beta_1 = 180°$;

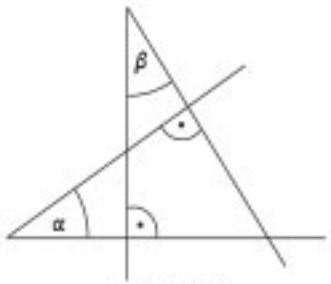
Из $\beta = \gamma$ и $\gamma + \beta_1 = 180°$ добијамо да је $\beta + \beta_1 = 180°$.

Углови са међусобно нормалним крацима су или идентични или комплементарни.

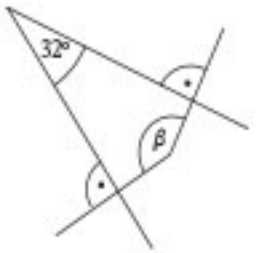
Задатак 4

а) Какви су међусобно углови α и угао β на цртежу 9?

б) Израчунај величину угла β на цртежу10.



цртеж 9



цртеж 10

Задатак 5

Углови α и β су углови са међусобно нормалним крацима. Ако је $\alpha = 151°$, шта онда може бити угао β? Нацртај.

Задатак 6

У дворишту су ограда и стаза постављене тако да се секу под углом од 60°. Власник је поставио клупу тако да је њена дужа ивица нормална на ограду. Затим је, поред тога, посадио цветну леју нормалну на стазу.

а) Нацртај скицу ограде, стазе, клупе и цветне леје.

б) Колики је угао између клупе и цветне леје?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На слици 2 приказан је план дела насеља са кућама и игралиштем.

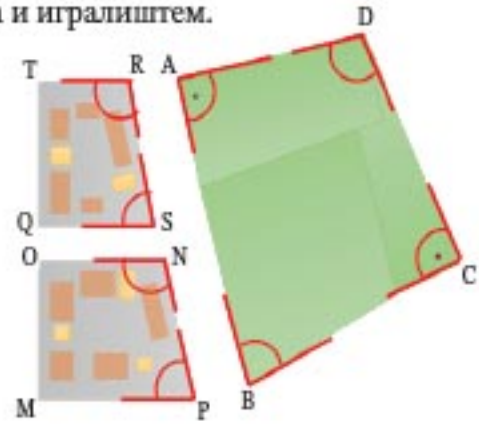
   а) Препиши и допуни знацима:
   „ || “ – “ ... је паралелан са ... ” и
   „⊥“ – “ ... је нормалан на ... ”:
   PM ___ SQ, PN ___ SR, DA___ AB,
   DC ___ CB, RT___ NO.

   б) Напиши парове углова са међусобно паралелним крацима.

   в) Напиши парове углова са међусобно нормалним крацима.

   г) Ако је $\sphericalangle MPN = 65°$, израчунај величину $\sphericalangle ONP$, $\sphericalangle QSR$ и $\sphericalangle SRT$.

   д) Ако је $\sphericalangle ADC = 110°$, израчунајте величину $\sphericalangle ABC$.



слика 2

2. Нацртај произвољан оштар угао α, произвољан туп угао β и тачке *S* и *P*, у њиховој унутрашњој области, одговарајуће. Нацртај угао:

   а) *ASB* чији су краци паралелни са крацима угла α, са истим смеровима,

   б) *CPD* чији су краци паралелни са крацима угла β, са супротним смеровима.

3. Нацртај углове AOB и COD и тачке T и Q у њиховој унутрашњој области, одговарајуће. Нацртај угао:
   а) ETF чији су краци паралелни са крацима угла AOB, крак TE има исти смер као крак OA, а крак TF има супротан смер од OB.
   б) GQH чији су краци паралелни са крацима угла COD, крак QH има супротан смер од крака OC, а крак QG има исти смер од OD.

4. Нацртај угао α и у његовој унутрашњости тачку M. Затим нацртај угао са теменом у тачки M и крацима који су међусобно нормални на краке угла α. Колико таквих углова има?

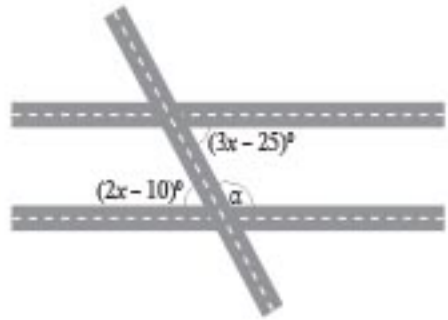
5. Један од два угла са међусобно паралелним крацима је 56°. Колико степени има други угао ако су:
   а) њихови краци у истом смеру, б) њихови краци у супротним смеровима,
   в) један пар кракова је у истом смеру, а други пар је у супротним смеровима?

6. Нађи углове α и β са међусобно паралелним крацима, ако:
   а) је њихов збир 154°, б) је њихова разлика 76°.

7. Нађи углове α и β са међусобно нормалним крацима, ако: а) $\alpha = 125° + \beta$, б) $\alpha = 3\beta$.

8. Две паралелне улице су пресечене трећом улицом као на слици 3. Нађи угао α.

9. У једном граду, улице A и B се секу под углом од 55°. На плану, урбаниста црта попречну улицу C, тако да је C нормална на A, и улицу D, тако да је D нормална на B.
   а) Нацртај скицу улица A, B, C и D.
   б) Колики је угао између улица C и D?
   в) Које врсте углова су угао између A и B и угао између C и D?



слика 3

2. КРУЖНИЦА, КРУГ И ЊИХОВИ ДЕЛОВИ

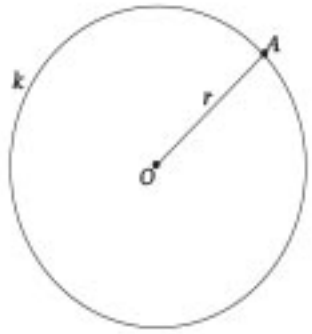
Кружница и Круг

Активност

Појмови кружнице и круга су међу најважнијим појмовима у геометрији.
а) На слици 1 одреди шта је кружница, а шта је круг.
б) Која је разлика између ова два облика?


слика 1

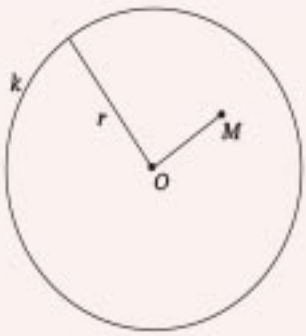
Подсетимо се да је **кружница** скуп свих тачака A у равни које су на једнакој удаљености r од дате тачке O у равни (*цртеж 1*).
Дужина $r = \overline{OA}$ = назива се **полупречник** кружнице.
Међутим, полупречник кружнице може да означава дуж која повезује центар са произвољном тачком кружнице.
Кружница са центром у тачки O и полупречником r означава се са $k(O, r)$ или само са k.



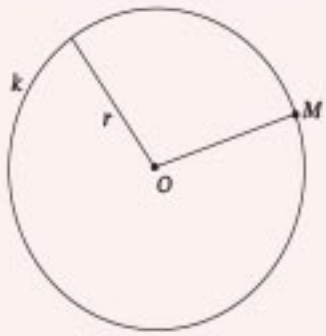
цртеж 1

Активност

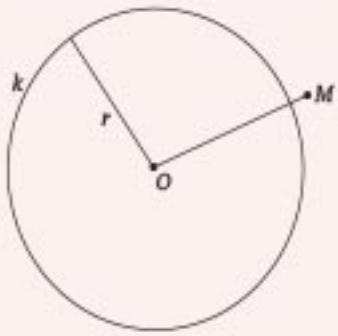
Који је положај тачке M у односу на кружницу k, ако је њено растојање до центра O кружнице:
а) мање од r (цртеж 2а) б) једнако на r (цртеж 2б) в) веће од r (цртеж 2в).



цртеж 2а

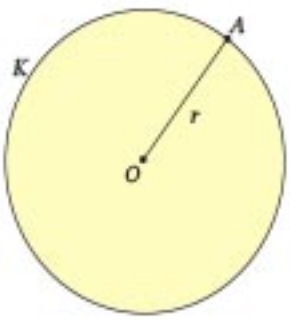


цртеж 2б



цртеж 2в

Подсетимо се да је **круг** скуп свих тачака А у равни које су на растојању мањем или једнаком на r од дате тачке O у равни (*цртеж 3*).
Сваки круг се састоји од једне кружнице и њене унутрашњости.
Ако је тачка A на кружници, онда се дужина $r = \overline{OA}$ назива **полупречник** круга.
Круг са центром у тачки O и полупречником r означен је са $K(O, r)$ или само са K.



цртеж 3

Задатак 1

Нацртај:
а) кружницу са произвољним центром и полупречником 2 cm,
б) круг са произвољним центром и полупречником 3 cm,
в) две концентричне кружнице са произвољним центром и полупречником 3 cm и 4 cm.

Кружни прстен

Активност

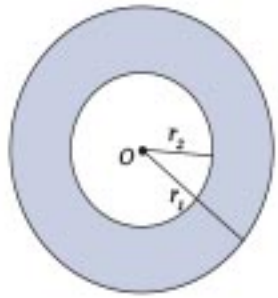
На слици 2 дато је неколико предмета из твоје околине. Да ли видиш 2Д облик који се појављује код свих предмета? Опиши га речима.



слика 2

Кружни прстен је део равни ограничен са две концентричне кружнице.

Цртеж 4 приказује кружни прстен ограничен са две концентричне кружнице са центром у тачки O и полупречницима r_1 и r_2.
Две концентричне кружнице припадају кружном прстену.



цртеж 4

Задатак 2

Нацртај две концентричне кружнице са полупречницима 3cm и 5 cm, а затим обој кружни прстен који је њима одређен.

Задатак 3

Спортско игралиште има стазу за трчање у облику кружног прстена дефинисаног са кружницама са полупречницима 10 m и 12 m.
а) Нацртај скицу стазе и обоји је.
б) Колика је ширина стазе?

Кружни одсечак

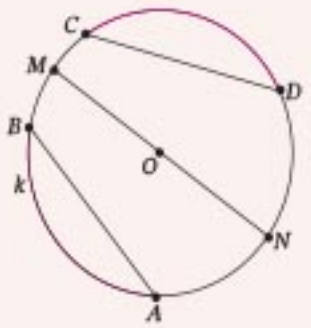
Активност

1. а) Шта је **тетива** кружнице? Наведи тетиве у кружници k датој на цртежу 5.

б) Шта је **пречник** кружнице? Наведи пречник дате кружнице.

в) Шта је **кружни лук** у кружници? Наведи кружне лукове који одговарају тетивама AB и CD, одговарајуће. Како се назива кружни лук који одговара пречнику MN?

г) Наведи тетиве које одговарају кружним луковима $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$, одговарајуће. Која тетива одговара кружном луку $\overset{\frown}{MN}$?



цртеж 5

2. Опиши 2Д облик који се појављује код свих предмета на *слици* 3.

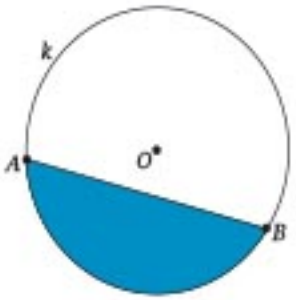


слика 3

Кружни одсечак је део круга ограничен са једном тетивом и кружним луком који одговара тој тетиви.
Ако је тетива пречник круга, онда се кружни исечак назива **полукруг**.

Цртеж 6 приказује кружни одсечак који тетиву AB одсеца од круга.

Тетива AB и кружни лук $\overset{\frown}{AB}$ припадају одсечку.



цртеж 6

Задатак 4

Нацртај круг полупречника 4cm и тетиву MN дужине 6 cm. Затим обој мањи кружни одсечак одређен тетивом MN и кружним луком $\overset{\frown}{MN}$ који одговара тетиви.

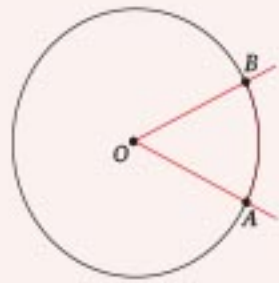
Задатак 5

Марко прави декорацију за школску приредбу. Исекао је два комада од круга, један од круга зелене боје, а други од круга црвене боје. У ком случају Марко може да састави круг од исечених делова? Објасни свој одговор.

Кружни исечак

Активност

1. Како се назива угао AOB на *цртежу* 7?



цртеж 7

2. Опиши 2Д облик који се појављује на свим објектима на *слици 4*.



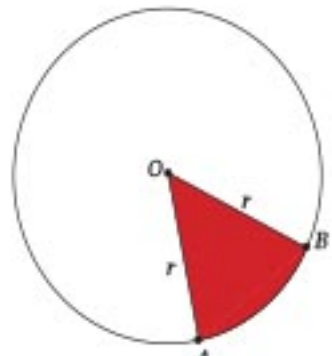
слика 4

Кружни исечак је део круга ограничен са два његова полупречника и кружним луком који је између њих обухваћен.

На цртежу 8 приказан је кружни пресек ограничен са два полупречника OA и OB и кружним луком $\overset{\frown}{AB}$ који је обухваћен њима.

Полупречници OA и OB и кружни лук $\overset{\frown}{AB}$ припадају кружном пресеку.

Сваком централном углу одговара један кружни исечак и, обратно, сваком кружном исечку одговара један централни угао.



цртеж 8

Задатак 6

Нацртај круг полупречника 3cm, а затим обој кружни исечак дефинисан са два његова полупречника и кружним луком који одговара централном углу од 90°.

Задатак 7

Пица има облик круга са полупречником $r = 15$ cm. Пица је исечена на 8 једнаких делова.

а) Који геометријски облик има парче пице?

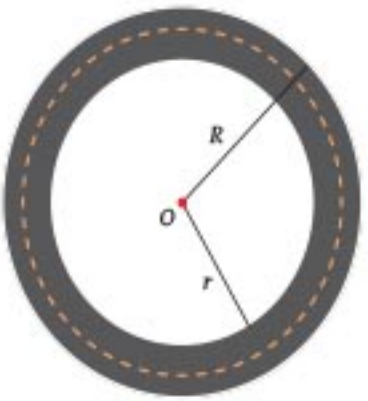
б) Колики је централни угао парчета пице?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На парцели, у облику круга, налази се језерце са травњаком око њега и мостом преко језерцета (слика 5).
   а) Како се назива део кружне парцеле који је травњак?
   б) Како се назива мањи део језера подељен мостом?
   в) Како се назива део језера где се налазе патке?
   г) Упореди величину дела са паткама и дела са белим лотосима.
   д) Колико је кружних одсечака представљено на слици језера?
   ђ) Колико је кружних исечака представљено на слици језера?



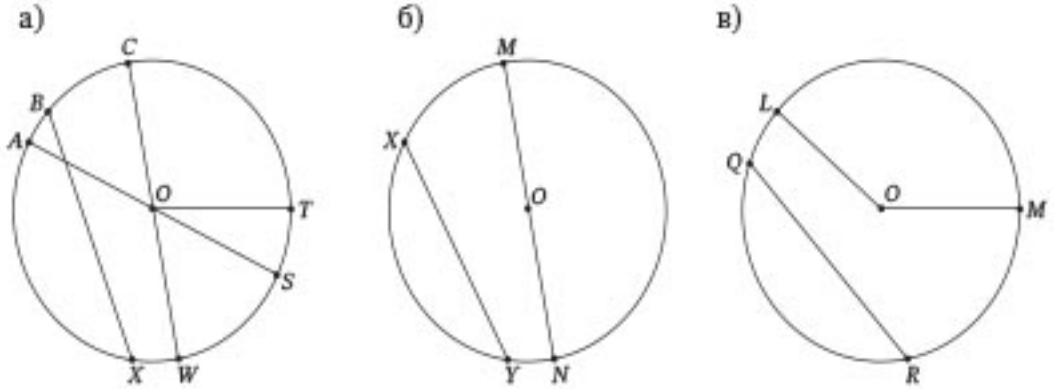
слика 5



слика 6

2. Колико је широк коловоз на кружној стази на слици 6, ако је $R = 87{,}2$ m и $r = 82{,}7$ m?

3. Наведи све кружне исечке које видиш на цртежу 9.



цртеж 9

4. Наведи све кружне исечке које видиш на цртежу 9.

5. Нацртај:
   а) кружни прстен ограничен са два концентричне кружнице полупречника 2 cm и 5 cm,
   б) кружни исечак са полупречником 3 cm који одговара централном углу од 120°,
   в) кружни одсечак са полупречником 4 cm који одговара централном углу од 60°

6. Пројектни задатак

Од 4 плочице са идентичним дизајном, формирају се 2 различите слике као на слици 7.



слика 7

Нацртај дате дизајне (слика 8) на квадратној плочици са страном од 10 cm. Направи најмање 4 идентичне плочице од картона и састави их као у примеру. Покушај да ово урадиш на више начина.

а) б)



слика 8

3. ПЕРИФЕРНИ УГАО

Активност

Ана се налази у центру круга О. Она види кружни лук између два дрвета под углом ВОС. Илир се налази у тачки А од кружнице.

а) Како се зове угао ВОС?

б) Који ће бити теме и странице угла испод којих ће видети исти лук из тачке А (слика 1)?

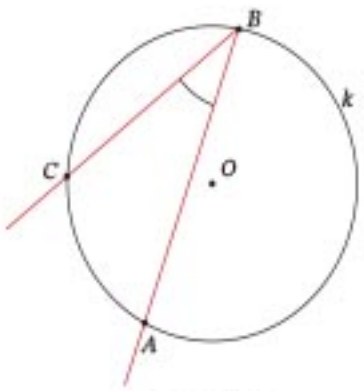


слика 1

Угао чије теме је на кружници, а краци секу кружницу назива се **периферни угао**.

На слици 1 дата је кружница k са центром O и углом ABC чије теме лежи на кружници. Његови краци секу кружни лук $\overset{\frown}{AC}$ на кружници на коме не лежи теме C. Угао ABC је периферни угао изнад лука $\overset{\frown}{AC}$.

За лук $\overset{\frown}{AC}$ који лежи у области периферног угла ABC кажемо да **одговара** периферном углу ABC.



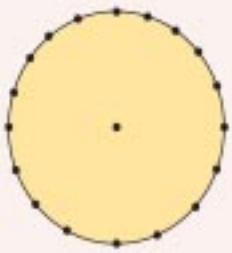
цртеж 1

Активност

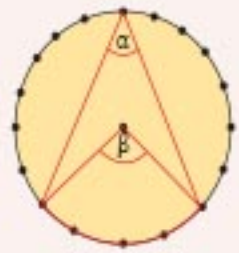
Да би лакше уочио/ла везе између углова у кружници, направи своју „угаону кружницу".

Потребно ти је: комад картона, стиропор, лењир, гумена трака и око 20 иглица са куглицама за причвршћивање папирних материјала на стиропор.

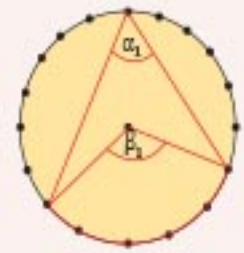
Припрема: На картону помоћу шестара нацртај круг полупречника од око 10 cm. Причврсти круг на стиропор, постављајући иглице дуж кружнице на приближно истом растојању. Постави једну иглицу у центар круга (слика 2а). Постави гумену траку као на слици 2б. Означи централни и периферни угао са α и β, респективно. Измери углове α и β лењиром, а затим упореди њихове величине. Промени лук угловог круга и означи централни и периферни угао са α_1 и β, одговарајуће (слика 2в). Измери и упореди углове α_1 и β_1. Понови поступак неколико пута мењајући лук угловог круга. Шта можеш да закључиш о величини периферног и централног угла над истим кружним луком?



слика 2а



слика 2б



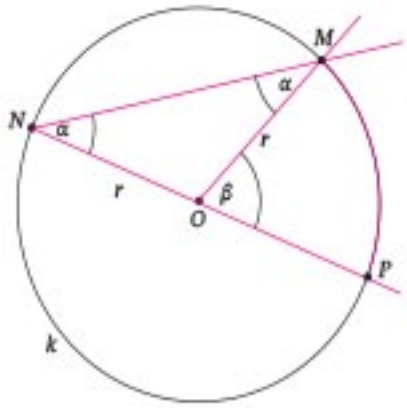
слика 2в

Да бисмо утврдили везу између величине централног и величине периферног угла над истим кружним луком, размотрићемо следећа три случаја:

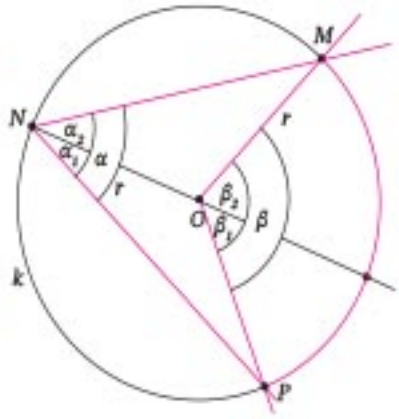
1. Центар кружнице лежи на једној од катета периферног угла (Сл. 2а). Троугао OMN је једнакокрак, тако да за његов спољашњи угао β важи

$$2\alpha = \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{2},$$

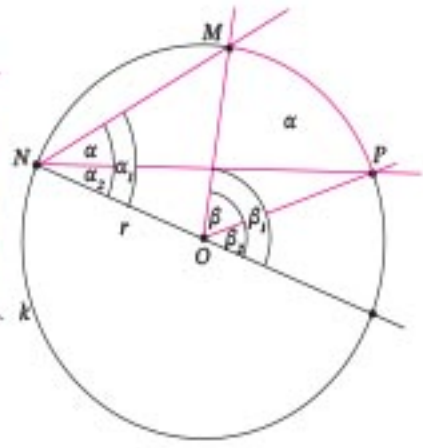
где је α угао у основи троугла.



цртеж 2а



цртеж 2б



цртеж 2в

2. Центар кружнице лежи у делу периферног угла (*цртеж 2б*).
Према цртежу налазимо да је $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ и $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. Тада је

$$2\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \beta,\ \ \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. Центар кружнице лежи ван области периферног угла (Сл. 2в). Према цртежу, налазимо да је $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ и $\beta_1 - \beta_2 = \beta$. Тада је.

$$2\alpha = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \beta,\ \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Величина периферног угла над датим луком једнака је половини централног угла над истим луком.

Пример 1

Наћи периферни угао који је изнад истог кружног лука са централним углом од:
а) 130°, б) 215°.

Означи са α периферни угао који треба да израчунамо. Пошто је периферни угао половина од централног угла β изнад истог кружног лука, добијамо:

а) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$, б) $\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{215^\circ}{2} = 107^\circ 30'$.

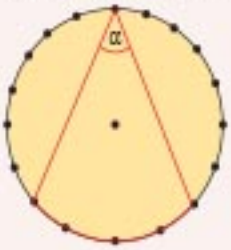
Задатак 1

Наћи величину периферног угла над луком који је $\frac{1}{6}$ кружнице.

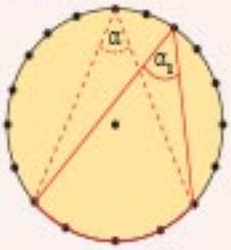
Активност

Поново ћемо користити кружницу угла (слика 3а). Измери угао α. Помери ластиш са темена угла α на другу иглицу од кружнице као на слици 3б. Измери добијени угао α1. Понови поступак још неколико пута померањем темена угла.

Шта закључујеш у вези величине измерених углова?

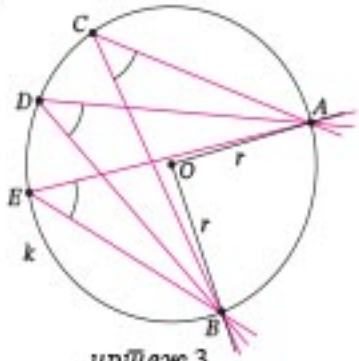


слика 3а



слика 3б

Ако си добро измерио, сигурно си утврдио да су периферни углови над истим кружним луком који си измерио/ла међусобно једнаки. До истог закључка би дошао/ла ако би измерио/ла и упоредио/ла величине периферних углова над кружним луком AB у кругу k на слици 3. Можемо да размислимо на следећи начин: пошто је величина сваког периферног угла над истим кружним луком једнака половини централног угла над истим луком, сви периферни углови над тим кружним луком су међусобно једнаки.

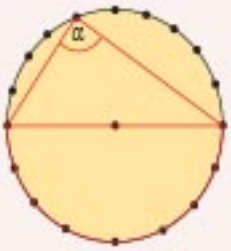


цртеж 3

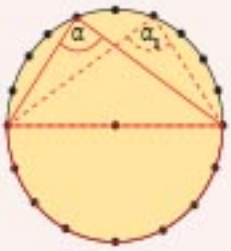
Сви периферни углови над истим кружним луком у једној кружници су **међусобно једнаки**.

Активност

Постави ластиш на угаону кружницу тако да централни угао буде прави угао. Тада ће периферни угао бити изнад полукруга као на слици 4а. Измери угао α (слика 4б). Помери ластиш од темена угла α до друге иглице из круга као на цртежу. Измери добијени угао α1. Понови поступак неколико пута померајући теме угла. Шта закључујеш о величини измерених углова?



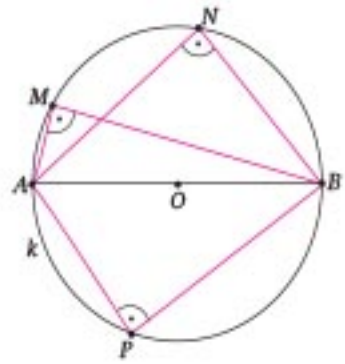
слика 4а



слика 4б

Ако си добро мерио/ла, утврдио/ла си да су периферни углови које си измерио/ла изнад полукружнице прави углови.

До истог закључка ћеш доћи ако користиш угломер за мерење и упоређивање величина периферних углова изнад централног угла AOB круга k на цртежу 4.
Можеш да размислиш и на следећи следећи начин: Пошто је мера сваког периферног угла над истим кружним луком једнака половини централног угла над истим луком, сви периферни углови над полукругом су прави углови. Ово својство је познато као **Талесова теорема.**



цртеж 4

Сваки периферни угао изнад полукруга је **прави** угао.

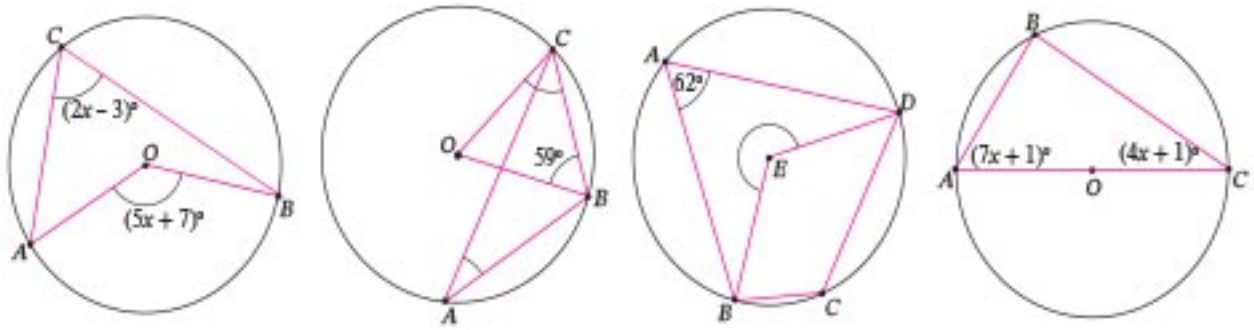
Ако узмемо у обзир да полукруг одговара пречнику круга, можемо рећи да је сваки периферни угао изнад пречника круга прав угао.
Из овога закључујемо да су све тачке у кругу пречника AB (осим тачака A и B) са теменима на правоуглог троугла са хипотенузом AB.

Задатак 2

Дата је права p и две тачке A и B које не леже на њој. Нацртај тачку M на правој p, тако да угао AMB буде прави угао.
Упутство: Нацртај круг чији је дуж AB пречник. Означи са M тачку пресека круга са датом правом p. Угао AMB је периферни угао над пречником AB.

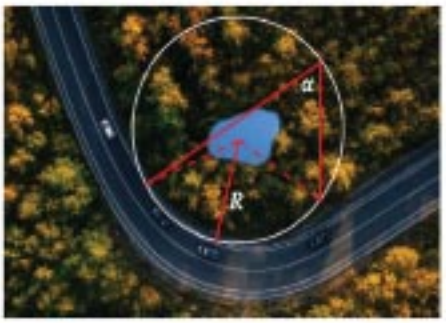
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нађи периферни угао који се налази изнад истог кружног лука са централним углом од:
   а) 158°, б) 89°.
2. Нађи централни угао који се налази изнад истог кружног лука са периферним углом од:
   а) 32°, б) 83°.
3. Колики је периферни угао изнад кружног лука који представља
   а) $\frac{3}{4}$, б) $\frac{4}{9}$, в) $\frac{5}{6}$, г) $\frac{3}{5}$ кружнице.
4. У којим границама се мења централни угао у кругу, а у којим границама периферни угао?
5. Збир величине периферног угла и одговарајућег централног угла у кругу износи 150°. Израчунај величину оба угла.
6. Према цртежу 5, израчунајте величину углова:
   а) $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle AOB$, б) $\sphericalangle CAB$, в) $\sphericalangle BED$ и $\sphericalangle BCD$, г) $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ACB$.



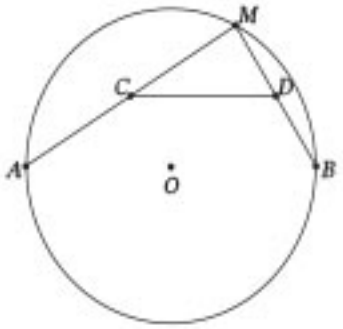
цртеж 5

7. На слики 5 дат је део кружнице који се види под углом од од $\alpha = 58°$ од тачке на кружници.
Под којим углом се види исти део центра круга?



слика 5

8. Из тачке M на кружници $k(O, r)$ су повучене две међусобно нормалне тетиве MA и MB (цртеж 6). Растојање између средишта C и D тетива је 2,5 cm. Израчунај пречник круга.
Упутство: Примени својство средње линије у троуглу.



цртеж 6

Истраживање

Потребан прибор за рад: оловка, ексери и конац.
Вежи оловку за један крај конца, а ексер за други. Нацртај тачку O. Закуцај ексер у тачку O и нацртај круг истезањем конца.
Изабери тачку A на кружници и, користећи исти поступак као и претходно, нацртај кружницу са центром у тачки A. Нека B буде једна од пресечних тачака два круга.
Поново, нацртај круг са центром у тачки C. Нека C буде пресечна тачка трећег круга са првим кругом, који је различит од A.
Шта представља дуж AC за први круг?
Изабери тачку D на првом кругу. Закуцај ексере у тачке A, C и D. Затим истегни конац око закуцаних ексера. Колики је угао CDA?
Образложи свој одговор.

4. КОНСТРУКЦИЈЕ НЕКИХ СПЕЦИЈАЛНИХ ВРСТА ТРОУГЛОВА

Активност

Исо треба да направи прецизан цртеж саобраћајног знака у облику једнакостраничног троугла са страницом од 3 cm (слика 1).

Помози Иси да конструише знак.



слика 1

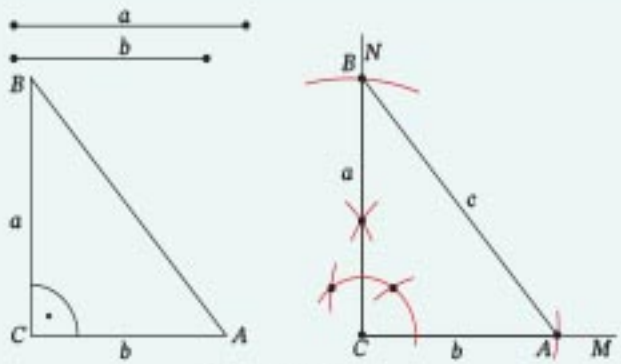
Конструкција правоуглог троугла са два дата елемента

Подсетимо се да поступак конструисања троугла почиње цртањем **скице** траженог троугла слободном руком. Затим, на основу скице, правимо **анализу** односа између датих и осталих елемената троугла. На крају, на основу анализе, одређујемо кораке којима спроводимо **конструкцију** троугла.

Пример 1

Конструиши правоугли троугао, ако су дате катете a и b.

На цртежу 1 дата је скица траженог правоугаоног троугла ABC са катетама a и b. Знамо да катете правоугаоног троугла заузимају прави угао. Сходно томе, конструкција се своди на конструкцију троугла са две дате странице и углом међу њима. Конструкцију чине следећи кораци:



цртеж 2

- Цртамо полуправу CM где је C теме једног троугла.
- на полуправи CM шестаром наносимо крак b да бисмо добили теме A,
- конструишемо прави угао са теменом C и једним краком на полуправи CM,
- на другом краку CN правог угла шестаром наносумо катету a да бисмо добили теме B троугла,
- спајањем темена A и B добијамо трећу страницу троугла ABC.

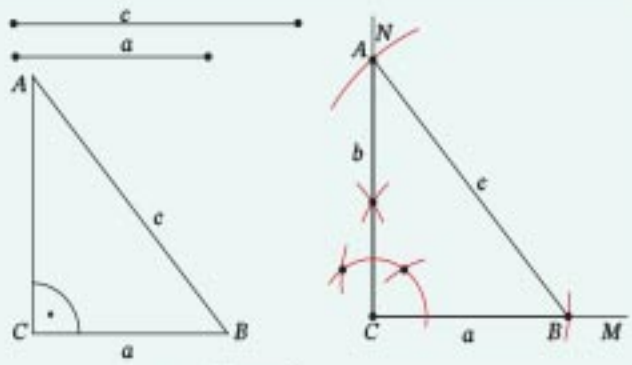
Задатак 1

Конструиши правоугли троугао, ако су катете $a = 3{,}6$ cm и $b = 4{,}5$ cm.

Пример 2

Конструиши правоугли троугао, ако је дата хипотенуза c и једна катета a.

На *цртежу* 2, катета a и хипотенуза c су нацртане лењиром. Такође, је направљена и скица траженог правоуглог троугла ABC са хипотенузом c и катетом a.



цртеж 2

Конструкцију чине следећи кораци:

- цртамо полуправу CM где је C једно теме троугла,
- на полуправи CM шестром наносимо катету a да би добили теме B,
- конструишемо прави угао са теменом C и једним краком на полуправи CM,
- са CN означавамо други крак правог угла,
- са A означавамо пресек кружног лука са центром у B и полупречником c са краком CN,
- спајањем темена A и B добијамо трећу страницу троугла ABC.

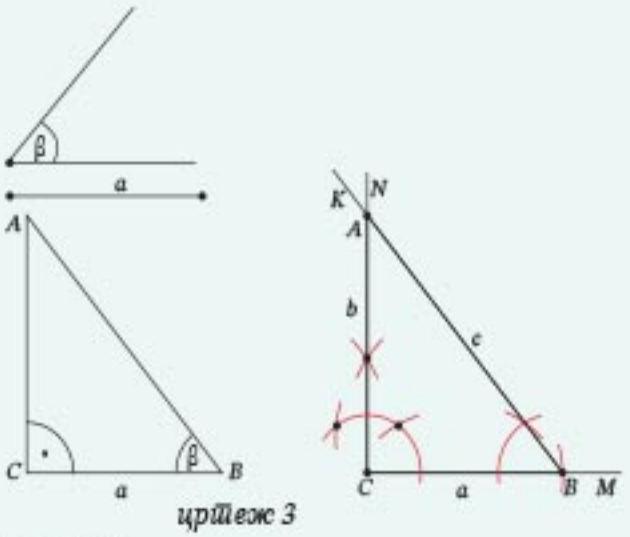
Задатак 2

Конструиши правоугли троугао, ако је дата хипотенуза $c = 7$ cm и катета $b = 3{,}4$ cm.

Пример 3

Конструиши правоугли троугао, ако су дати катета a и угао β.

Скица траженог правоуглог троугла ABC са катетом a и углом β дата је на *цртежу* 3.



цртеж 3

Конструкција се састоји од следећих корака:

- цртамо полуправу CM,
- на полуправи CM шестаром наносимо катету a да бисмо добили теме B,
- конструишемо прав угао са теменом C,
- други крак правог угла обележавамо са CN
- конструишите угао β у темену B и један крак BC,
- са BK означавамо други крак угла β,
- на пресеку кракова NC и BK добијамо трећи теме A троугла ABC.

Задатак 3

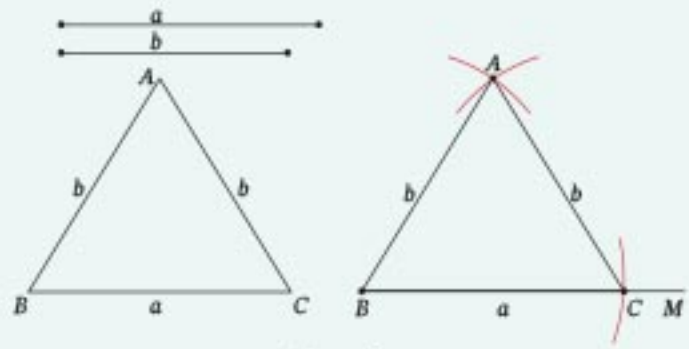
Конструиши правоугли троугао, ако је дата хипотенуза $c = 5$ cm и угао $\alpha = 60°$.

Конструкција једнакокраког троугла са два дата елемента

Пример 4

Конструиши једнакокраки троугао, дата је основица a и крак b.

Скица траженог једнакокраког троугла ABC са основом a и катетом b дата је на *цртежу 4*. Знамо да су катете једнакокраког троугла једнаке. Према томе, конструкција се своди на конструкцију троугла са три дате странице. Састоји се од следећих корака:



цртеж 4

- конструишемо полуправу BM са почетком у темену B,
- наносимо основу a на полуправу BM да би се добило теме C,
- конструишемо кружни лук са центром у B и полупречником b,
- конструишемо кружни лук са центром у C и полупречником b,
- означимо са A пресек два кружна лука (A је треће теме троугла),
- спајамо теме A са теменима B и C да бисмо добили троугао ABC.

Задатак 4

Конструиши једнакокраки троугао, ако је дата страница $b = 5$ cm и угао код основе $\alpha = 45°$.

Пример 5

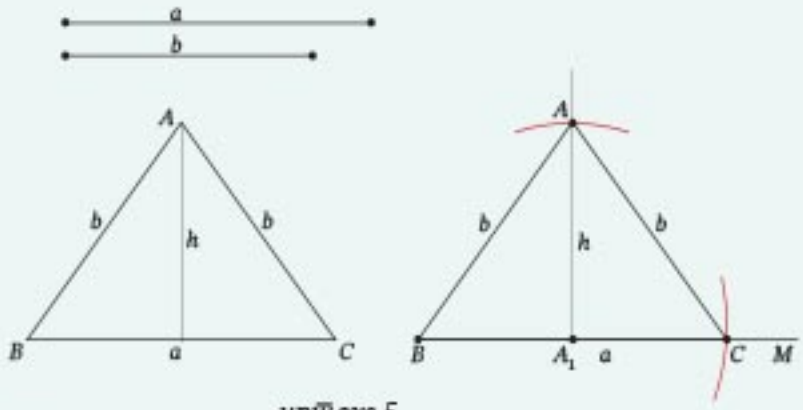
Конструиши једнакокраки троугао ако су дати основица a и висина h која одговара тој основици.

На цртежу 5 дата је скица траженог једнакокраког троугла ABC са основом a и висином h ка основи. Знамо да је подножје висине до основе једнакокраког троугла средишња тачка основе.

Конструкција се састоји од следећих корака:

- цртамо полуправу BM која почиње у темену B,
- на полуправи BM наносимо основу a да би добили теме C,
- конструишемо симетралу на дужи BC,
- са A_1 означавамо тачку пресека симетрале и дужи BC,

- конструишемо кружни лук са центром у тачки A_1 и полупречником h,
- са A означавамо тачку пресека симетрале и кружног лука,
- повезујемо теме A са теменима B и C да бисмо добили троугао ABC



цртеж 5

Задатак 5

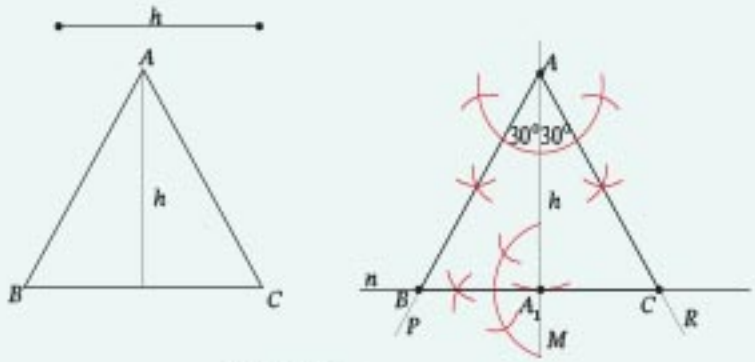
Конструиши једнакокраки троугао, ако је дат крак b и висина h спуштена ка основи.

Конструкција једнакостраничног троугла са датом висином или са датом тежишном линијом

Пример 6

Конструиши једнакостранични троугао, ако је дата његова висина h.

Скица траженог једнакостраничног троугла ABC, са висином h спуштеном из темена A, дата је на *цртежу 6.* Конструкција се састоји од следећих корака:



цртеж 6

- нацртај полуправу AM која почиње у темену A,
- на полуправи AM, из темена A наносимо висину h, да бисмо добили њену основу A_1,
- конструишемо два угла MAP и MAR од 30° (са теменом у тачки A, лево и десно од висине h),
- конструишемо праву n кроз тачку A_1 нормално на AA_1
- са B означавамо тачку пресека праве n и крака AP,
- са C означавамо тачку пресека на прави n и крака AR,
- тражени троугао је троугао ABC

Пример 7

Конструиши једнакостранични троугао ако је дато његова тежишна дуж t.

У једнакостраничном троуглу, тежишна дуж се поклапа са висином. Стога се конструкција једнакостраничног троугла са датом тежишном дужи своди на конструкцију једнакостраничног троугла са датом висином.

Задатак 6

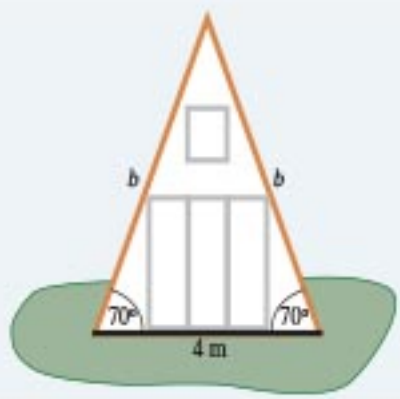
Конструиши једнакостранични троугао ако је дата његова:
а) висина $h = 4$ cm, б) тежишна линија t = 5 cm.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Конструиши правоугли троугао ABC, ако су дати:
   а) катете $a = 3$ cm и $b = 4$ cm, б) хипотенуза $c = 6$ cm и катета $b = 3$ cm.
2. Конструиши правоугли троугао ABC, ако су дати:
   б) хипотенуза $c = 5{,}6$ cm и угао $\alpha = 38°$, б) катета $a = 4$ cm и угао $\alpha = 40°$.
3. Конструиши једнакокраки троугао ABC, ако су дати:
   а) основа $a = 3{,}2$ cm и висина $h = 4{,}5$ cm,
   б) угао код основе $\alpha = 58°$ и основа $a = 3$ cm.
4. Конструиши једнакокраки троугао ABC, ако су дати:
   а) угао код темена $\gamma = 46°$ и крак $b = 5{,}2$ cm,
   б) крак $b = 6{,}2$ cm и угао код основе $\alpha = 73°$,
   в) висина до основе $h_a = 5$ cm и угао код темена $\gamma = 48°$.
5. Конструиши једнакокраки троугао ABC, ако су дати:
   а) висина $h = 3{,}6$ cm, б) тежиште $t = 4{,}2$ cm.

Истраживање

Кућа на слици 1 има ширину 4 m у основи, а кров захвата угао од 70° са основом куће. Сафет нема мердевине и треба да измери висину куће. Истражи и објасни како може да сазна која је висина куће конструишући троугао у размери.



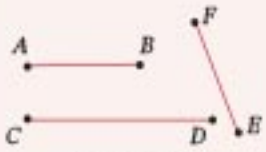
слика 1

5. ПОЈАМ ПОДУДАРНОСТИ. ПОДУДАРНИ ТРОУГЛОВИ

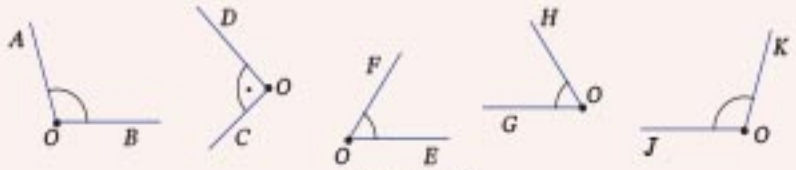
Појам за подударност Подударни 2Д облици

Активност

1. а) Измери дужи на цртежу *1а* и упореди њихове дужине. Шта можеш закључити?
б) Колика је дужина дужи AB у односу на дуж EF?
2. Измери углове угломером на цртежу *1б* и одреди који од њих имају исту величину.



цртеж 1а



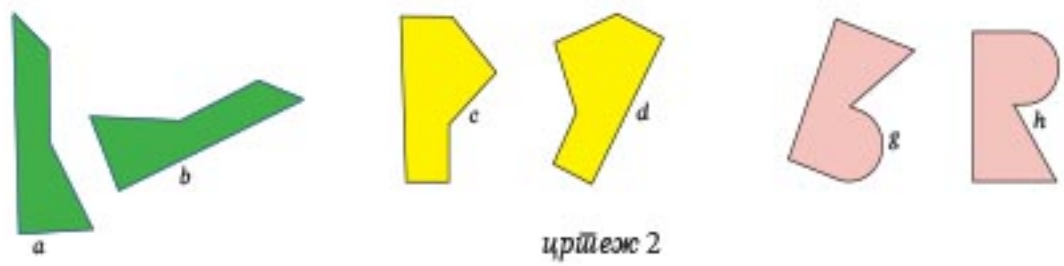
цртеж 1б

Дужи које имају једнаке дужине називају се **подударним дужима.**
Углови једнаких величина називају се **подударним угловима.**

Померањем једне дужи до њене подударности или померањем угла ка његовој подударности, ови геометријски облици се поклапају. Да ли се исто односи и на друге геометријске облике? У свакодневном животу често говоримо о подударним облицима. Под овим подразумевамо да су два облика подударна ако имају **исти облик** и **величину**. На пример, такви су: листови папира или новина, шаблон и његов крој, два новчића исте вредности и тако даље.

2Д облици који се могу поклопити један са другим називају се **подударни 2Д облици.**

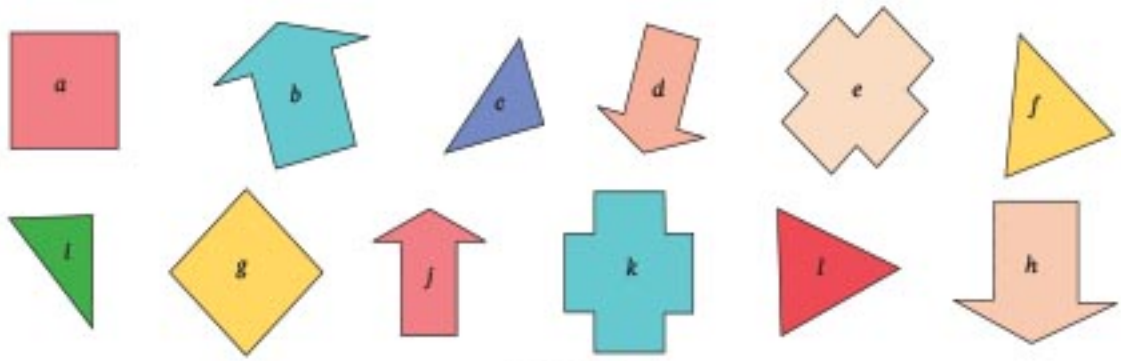
Да бисмо означили подударност два облика, користимо знак $\cong$. Знаком $\ncong$ означавамо да дати облици нису подударни.
За парове подударних 2Д облика на слици 2, означавамо a $\cong$ b, c $\cong$ d и g $\cong$ h.



цртеж 2

Задатак 1

Употребом знака подударности $\cong$, напиши парове подударних 2Д облика на цртежу 3.



цртеж 3

Пример 1

Који је услов да би:
а) два круга била подударна, б) два квадрата била подударна?

Биће подударни ако имају: а) једнаке полупречнике, б) странице једнаке дужине.

Задатак 2

Нацртај два подударна правоугаоника. Ако један правоугаоник има странице 3 cm и 5 cm, колике ће бити странице другог правоугаоника?

Подударани троуглови

Подсетимо се да су странице и углови основни елементи троугла. С обзиром да смо говорили о подударним дужима и угловима, питање подударности два троугла се природно намеће.

Пример 2

Нацртај два троугла и означите их као на цртежу 4.
а) Измери странице оба троугла. Упореди дужине страница: AB и FD, AC и FE, BC и DE.
б) Измери углове оба троугла. Упореди величине: $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle F$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle E$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle D$.
в) Затим исеци два троугла и преклопи их један преко другог. Шта закључујеш, хоће ли се једнаке странице и једнаки углови поклапати? Хоће ли се два троугла подударати?
г) Напиши парове темена, страница и углова који се поклапају.

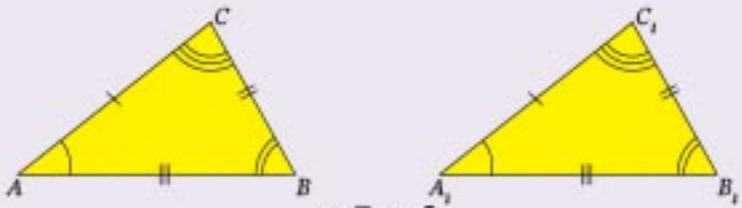


цртеж 4

а) Ако си мерио/ла правилно, добио/ла би да је: $\overline{AB} = \overline{FD}$, $\overline{AC} = \overline{FE}$ и $\overline{BC} = \overline{DE}$.
б) Из измерених углова уочаваш да је: $\sphericalangle ABC = FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FED$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DF$.
в) Примећујемо да су се једнаке странице и једнаки углови поклопили:
AB и *FD*, *AC* и *EF*, *BC* и *DE*; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDE$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle FED$ и $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFE$
Два троугла су се поклопила. У овом случају, теме A се поклопило са теменом *F*, *B* са *D* и *C* са *E*.
г) За тачке, странице и углове који су се поклопили кажемо да су међусобно **одговарајући**. У том смислу кажемо да:
теме *A* је подударно са теменом *F*, *B* је подударно са *D* и *C* је подударно са *E*, страна *AB* је подударна са страном *FD*, *AC* је подударно са *FE* и BC је подударно са *DE*, и угао ABC је подударан са углом *FDE*, угао *ACB* је подударан са углом *FED* и угао *BAC* је подударан са углом *DFE*.

За троуглове *ABC* и $A_1 B_1 C_1$ кажемо да су **подударни**, ако имају једнаке одговарајуће стране и једнаке одговарајуће углове (цртеж. 5), односно,

$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, и
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1C_1A_1$.



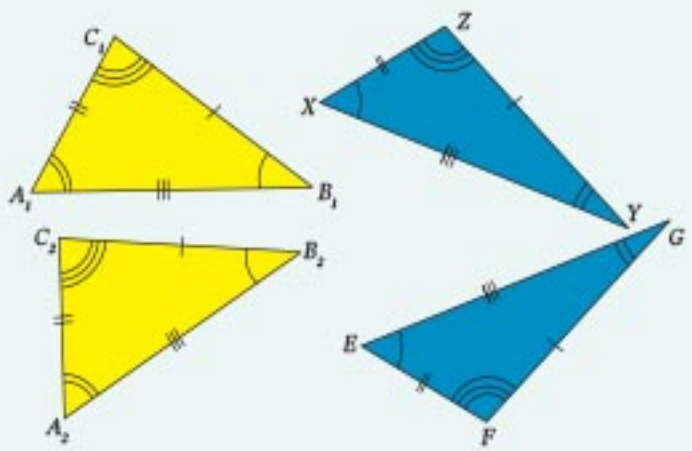
цртеж 5

Ако су два троугла *ABC* и $A_1 B_1 C_1$ подударна, пишемо $\Delta ABC \cong \Delta A_1 B_1 C_1$. Договарамо се, према редоследу темена у записима два троугла, да читамо одговарајуће елементе.

Пример 3

Напиши парове подударних троуглова на *цртежу* 6.

Теме A_1 одговара темену A_2, B_2 са B_2 и C_1 са C_2.
Према ознакама на цртежу, одговарајуће странице су једнаке:
$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ (означене са три цртице |||)
$\overline{A_1C_1} = \overline{A_2C_2}$ (означене са две цртице ||)
$\overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2}$ (означене са једном цртице |) |)



цртеж 6

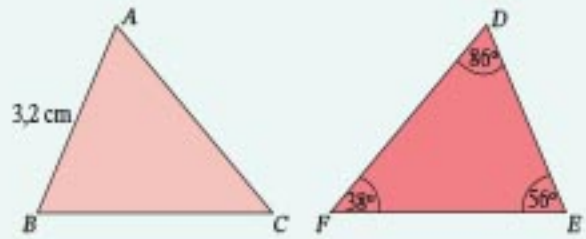
Слично томе, према симболима на цртежу, одговарајући углови су једнаки:
$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_2B_2C_2$, $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_2C_2A_2$.
Значи $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_2B_2C_2$.
На исти начин закључујемо да је: $\Delta XYZ \cong \Delta EGF$.

Пример 4

За троуглове на цртежу 7 важи $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.
Према подацима на цртежу, нађи
а) дужину странице DE, б) вечичину угла у темену B.

Из услова у задатку следи да $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

а) Страна DE је подударна са страном AB. Према томе, оне имају једнаке дужине, односно $\overline{AB} = \overline{DE}$, јер $\overline{AB} = 3{,}2\,\text{cm}$, закључујемо да је $\overline{DE} = 3{,}2\,\text{cm}$.

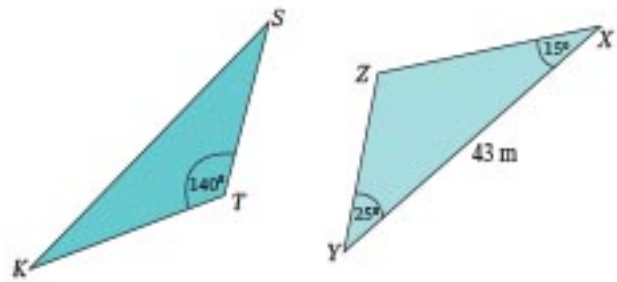


цртеж 7

б) Угао у темену B је подударан са углом у темену E. Према томе, они имају једнаке величине, односно $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FED$. Јер $\sphericalangle FED = 56°$. закључујемо да је $\sphericalangle CBA = 56°$.

Задатак 3

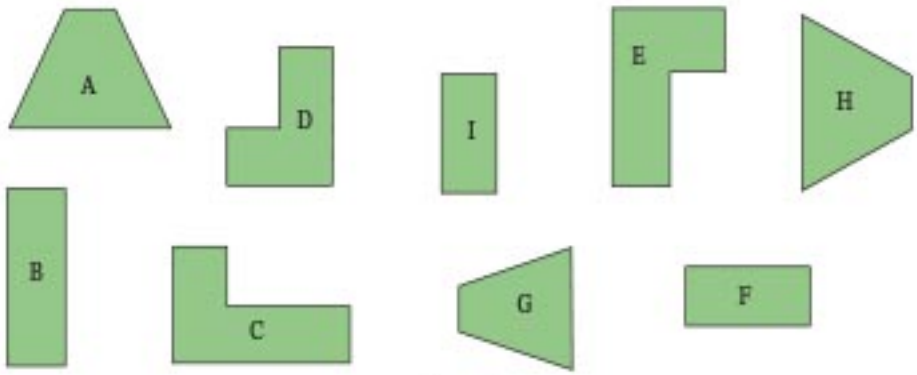
За троуглове на *цртежу 8* важи $\Delta KST \cong \Delta XYZ$. Према подацима на цртежу, израчунај
а) дужину стране KS,
б) величину угла у темену S.



цртеж 8

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

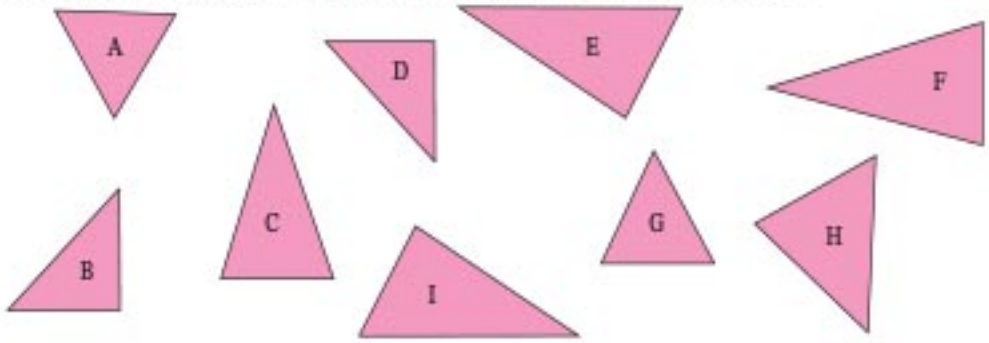
1. Запиши парове подударних 2Д облика које видиш на цртежу 9.



цртеж 9

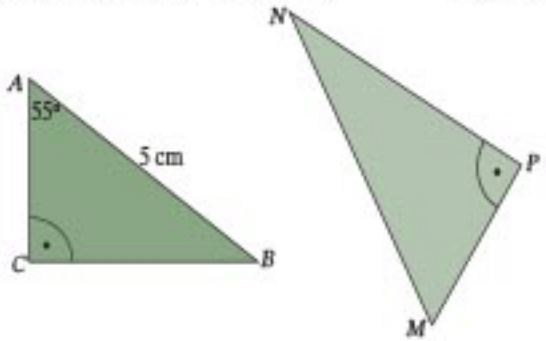
2. Познато је да је $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. Напиши одговарајуће парове по:
а) теменима, б) страницама троуглова ABC и DEF.

3. Напиши парове подударних троуглова које видиш на *цртежу 10*

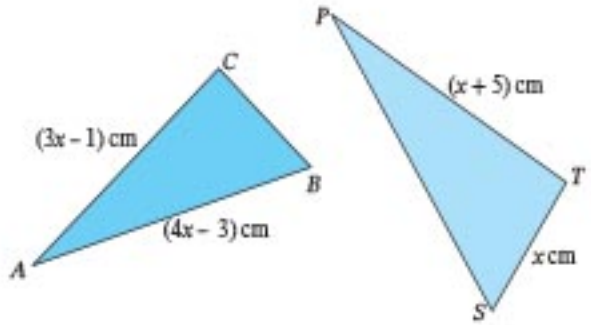


цртеж 10

4. Познато је да је $\Delta ABC \cong \Delta MNP$. Према подацима на *цртежу 11*, пронађи
а) дужину странице MN, б) величину угла у темену N.



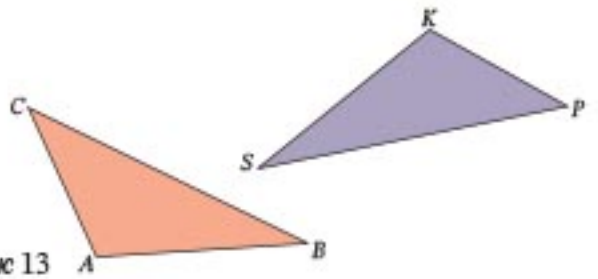
цртеж 11



цртеж 12

5. Познато је да је $\Delta ABC \cong \Delta PST$. Према подацима на *цртежу12*, пронађи дужину сваке од страница троуглова.

6. Познато је да је $\Delta ABC \cong \Delta KSP$ *цртеж 13*.
Израчунај величину угла KSP, ако
$\sphericalangle BAC = 138^0$ и $\sphericalangle ACB = 26°$.



цртеж 13

Истраживање

Нека је скуп свих 2Д облика дат релацијом R „ ... је подударна са ... “.
Тестирајте да ли је релација R рефлексивна, симетрична и транзитивна.

6. ЗНАЦИ ПОДУДАРНОСТИ ТРОУГЛОВА

Да бисмо проверили да ли су два троугла подударна, потребно је да проверимо да ли се могу довести до подударања, тј. преклапања. Али се природно поставља питање да ли је то увек реално могуће. На пример, на овај начин не можемо проверити да ли су две парцелеу облику троугла подударне, јер их не можемо довести до подударања.
Зато користимо друге начине за одређивање подударности троуглова, који се називају **знаци подударности троуглова**. Они одређују услове за одређивање подударности датих троуглова. Постоје **три основна знака подударности троуглова.**

Први знак подударности троуглова

Активност

Странице троугла су дугачке 3 cm и 5 cm, а угао између њих је 102°. Колико оваквих троуглова можеш нацртати? Објасни свој одговор.

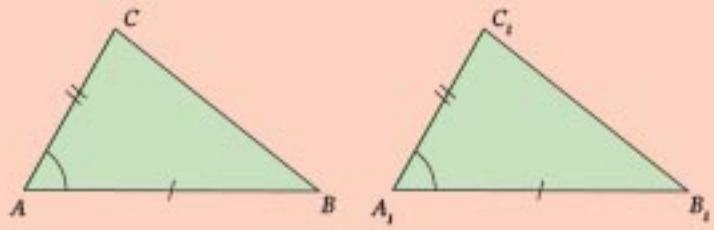
Два троугла су подударна ако су две странице и угао између њих једног троугла једнаки одговарајућим двема страницама и углу између њих другог троугла (цртеж.1).

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$,

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$

C: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

CAC: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

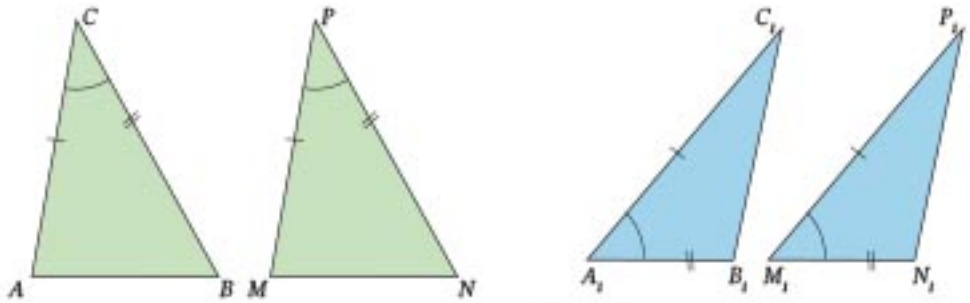


цртеж 1

Према овом знаку, да бисмо одредили подударност два троугла, проверавамо једнакост две странице и угла између њих из једног троугла са одговарајућим елементима другог троугла. Стога се ово својство назива **страна–угао–страна** и скраћено се означава као **СУС.**

Пример 1

На цртежу 2, нацртани су парови троуглова и одговарајући елементи су означени. Користећи СУС својство, утврди да су троуглови подударни:



цртеж 2

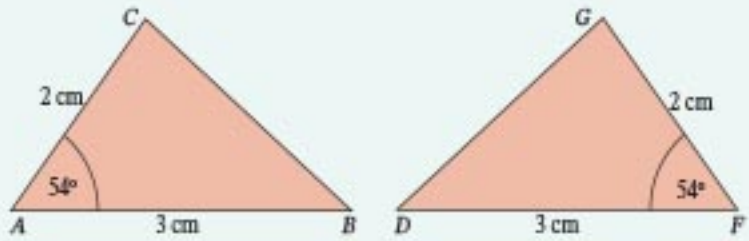
C: $\overline{AC} = \overline{MP}$
A: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MPN$
C: $\overline{CB} = \overline{PN}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta MNP$

C: $\overline{A_1B_1} = \overline{M_1N_1}$
A: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
C: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
CAC: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Пример 2

Провери да ли су троуглови на *цртежу 3* подударни.

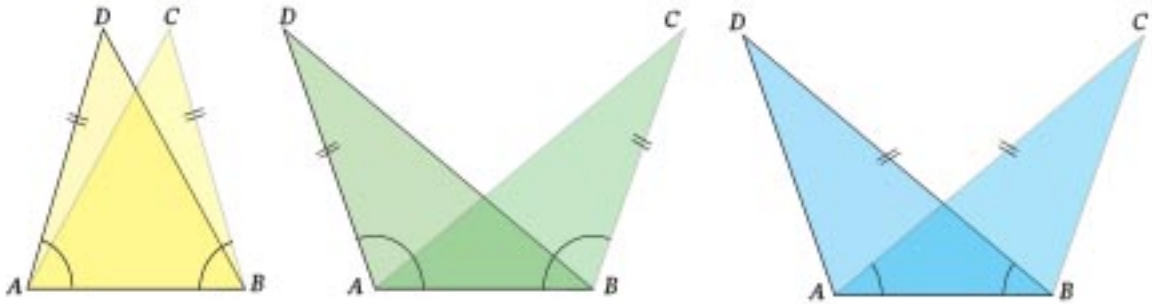
C: $\overline{AB} = \overline{FD} = 3$ cm
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 54°$
C: $\overline{AC} = \overline{FG} = 2$ cm
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$



цртеж 3

Пример 3

Објасни зашто су троуглови у сваком пару троуглова подударни (*цртеж. 4*):



цртеж 4

C: AB је заједничка страна
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
C: $\overline{BC} = \overline{AD}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

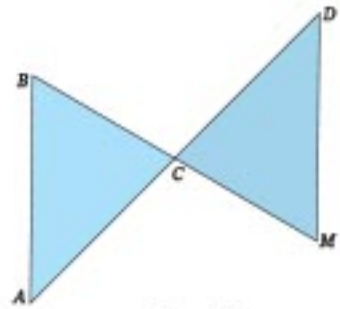
C: AB је заједничка страна
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$
C: $\overline{BC} = \overline{AD}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

C: AB је заједничка страна
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$
C: $\overline{AC} = \overline{BD}$
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

Пример 4

Размотримо 2Д облик на *цртежу 5.*
Тачка C је средиште дужи AD и BM.
Објасни зашто $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.

C: $\overline{AC} = \overline{DC}$ C је средишња тачка дужи AD.
A : $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCM$ Као унакрсни углови.
C: $\overline{BC} = \overline{MC}$ C је средишња тачка за дуж BM.
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta DMC$.



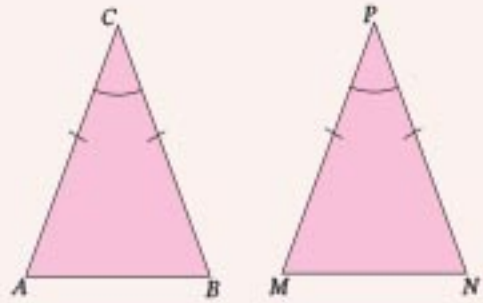
цртеж 5

Активност

Разгледај троуглове на *цртежу 6а* и *6б*. Шта је довољно да би се утврдило:
а) два правоугла троугла су подударна,
б) два једнакокрака троугла су подударна?



цртеж 6а



цртеж 6б

- Два **правоугла троугла** су подударна ако су краци једног троугла једнаки одговарајућим крацима другог троугла.
- Два **једнакокрака троугла** су подударна ако су крак и угао у врху једног троугла једнаки краку и углу у врху другог троугла.

Пример 5

У једнакокраком троуглу MPQ, висина се спушта из темена P на основу MQ (*цртеж. 7*). Провери да ли је $\Delta MNP \cong \Delta QNP$.

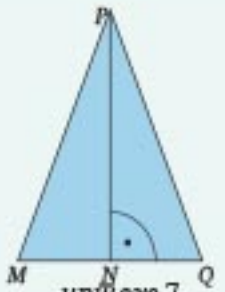
За троуглове MNP и QNP: важе следећи услови:

C: PN је заједничка страна.

A: $\sphericalangle MNP = \sphericalangle QNP = 90°$ Висина је нормална на основу.

C: $\overline{NM} = \overline{NQ}$ Висина дели основу на два једнака дела.

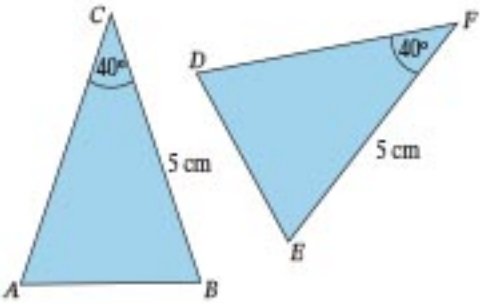
CAC: $\Delta MNP \cong \Delta QNP$



цртеж 7

Задатак 1

Објасни зашто су једнакокраки троуглови ABC и DEF подударни (*цртеж 8*).



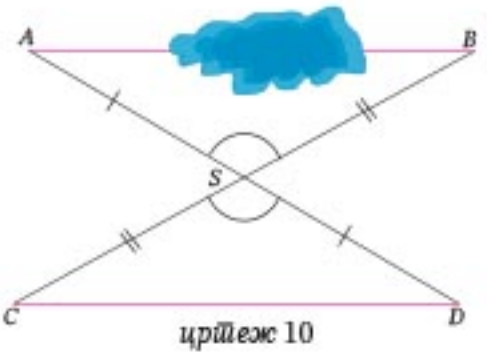
цртеж 8

Задатак 2

Геодета на терену приказаном на *цртежу 9* треба да измери растојање између тачака A и B. Међу њима се налази преграда која спречава мерење потребног растојања. Како ће геодета одредити ово растојање користећи знак СУС?
Упутство: Погледај *цртеж 10* и објасни зашто геодета може да измери растојање између тачака C и D уместо растојања између тачака A и B.



цртеж 9

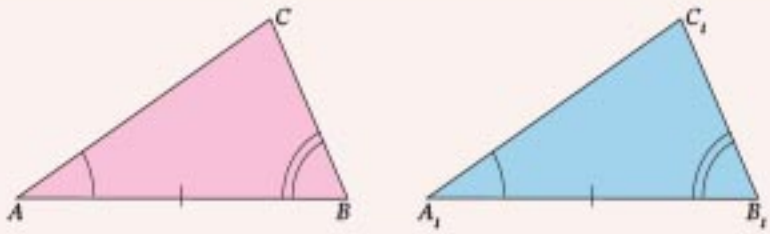


цртеж 10

Други знак подударности троуглова УСУ

Активност

1. На цртежу 11 приказана су два троугла, за које се зна да сваки има по једну страну једнаке дужине, а одговарајући углови који леже на тој страни су једнаки. Пажљиво их измери и упореди одговарајуће елементе датих троуглова. Да ли су троуглови подударни?



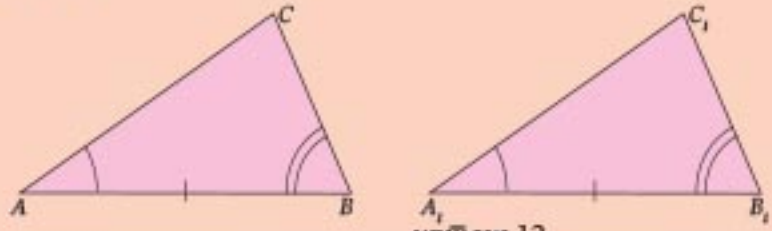
цртеж 11

2. Нацртај троугао са произвољним дужинама страна и величинама углова. Затим, на провидном папиру, нацртај други троугао чија ће једна страна и углови који леже на њој бити једнаки једној страни и одговарајућим угловима другог троугла.
а) Да ли се троуглови подударају? б) Да ли су троуглови подударни?

Ако си правилно радио/ла, у претходне две активности си видео/ла да су троуглови подударни.

Два троугла су подударна ако су једна страница и углови који леже на тој страни једног троугла једнаки одговарајућој страници и угловима који леже на тој страни другог троугла (*цртеж. 12*).

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$
ACA: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$

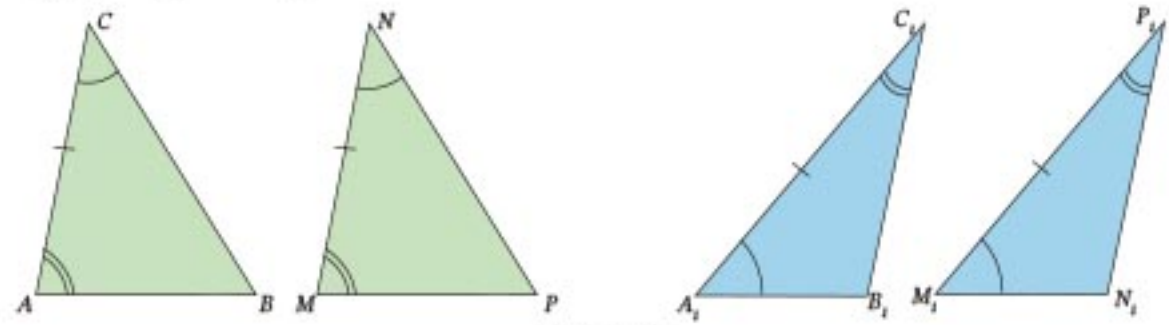


цртеж 12

Знак се назива **угао–страна–угао** и скраћено се пише **УСУ**, јер да бисмо одредили подударност два троугла, проверавамо једнакост једне стране и углова који леже на тој страни једног троугла са одговарајућим елементима другог троугла.

Пример 6

Користећи знак **УСУ**, запиши подударне троуглове и одреди зашто су троуглови подударни (цртеж. *13*):



цртеж 13

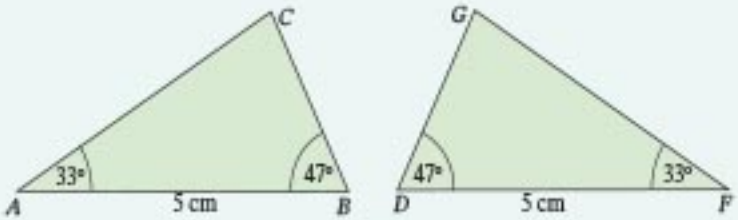
A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle PMN$
C: $\overline{AC} = \overline{MN}$
A: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MNP$
ACA: $\Delta ABC \cong \Delta MPN$

A: $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle N_1M_1P_1$
C: $\overline{A_1C_1} = \overline{M_1P_1}$
A: $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle M_1P_1N_1$
ACA: $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta M_1N_1P_1$

Пример 7

Утврди да ли су троуглови на *цртежу 14* подударни.

A: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DFG = 33°$,
C: $\overline{AB} = \overline{DF} = 5\,\text{cm}$,
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle FDG = 47°$.
ACA: $\Delta ABC \cong \Delta FDG$.



цртеж 14

Задатак 3

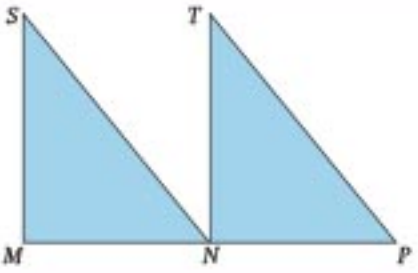
Цртеж 15 приказује паралелограм *KLMJ* у коме је нацртана дијагонала *KM*. Да ли су троуглови *KLM* и *MJK* подударни?
Објасни свој одговор.



цртеж 15

Пример 8

За 2Д облик на *цртежу 16*, дати су следећи услови:
$\overline{MN} = \overline{NP}$, $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ и $SN \parallel TP$.
Објасни зашто $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.



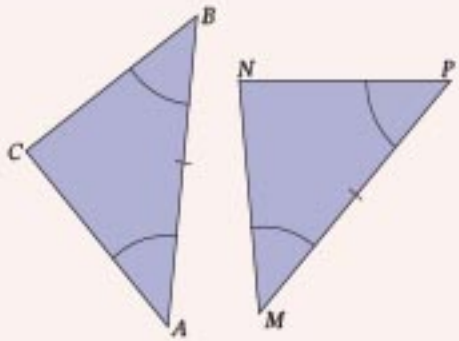
цртеж 16

A: $\sphericalangle SMN = \sphericalangle TNP$ — Према услову у задатку.
C: $\overline{MN} = \overline{NP}$ — Према услову у задатку.
A: $\sphericalangle MNS = \sphericalangle NTP$ — Углови имају међусобно паралелне стране због услова $SN \parallel TP$.
ACA: $\Delta SMN \cong \Delta TNP$.

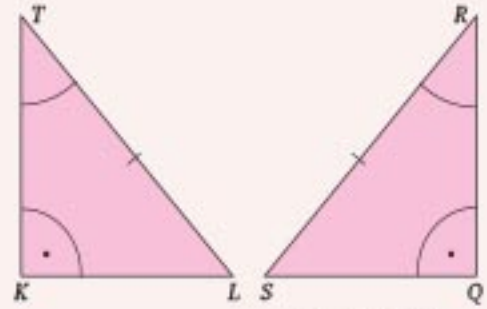
Активност

а) Да ли је могуће одредити подударност једнакокраких троуглова ABC и MPN, ако су им једнаки означени елементи на цртежу 17?

б) Зашто су правоугли троуглови KLT и QSR на слици 18 подударни?



цртеж 17



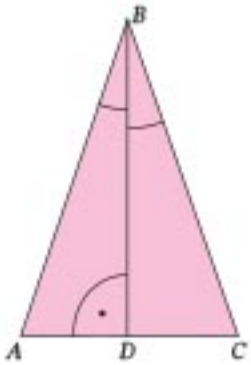
цртеж 18

- **Два правоугла троугла** су подударна ако су једна катета и оштар угао на њој једног троугла једнаки одговарајућој катети и оштром углу на њој другог троугла.
- **Два правоугла троугла** су подударна ако су хипотенуза и један оштар угао једног троугла једнаки хипотенузи и одговарајућем оштром углу другог троугла.
- **Два једнакокрака троугла** су подударна ако су основица и угао који лежи на њој једног троугла једнаки основици и углу који лежи на њој другог троугла.

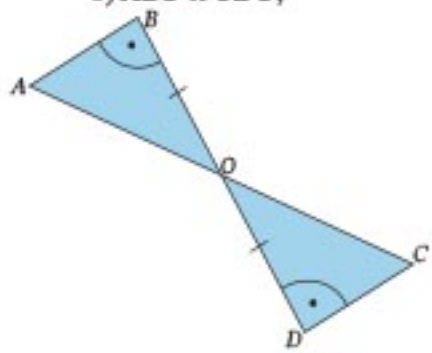
Задатак 4

Објасни подударност троуглова на цртежу 19:

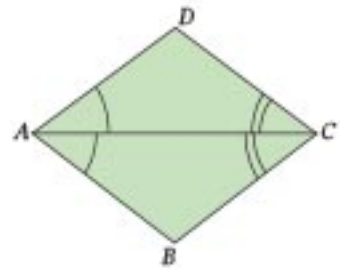
а) ADB и CDB,



б) ABO и CDO,



в) ABC и ADC.

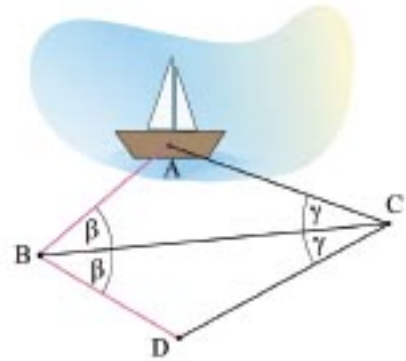


цртеж 19

Задатак 5

Како одређујемо растојање између чамца и колибе на обали која се налази у тачки B, користећи друго својство подударности троуглова?

Упутство: Разгледај *цртеж 20* и објасни зашто уместо да мериш растојање од A до B можеш да мериш растојање од B до D.



цртеж 20

Трећи знак подударности троуглова ССС

Активност

Колико троуглова можеш да нацрташ ако су дужине његових страна 4cm, 6 cm и 7 cm, одговарајуће? Нацртај такав троугао.

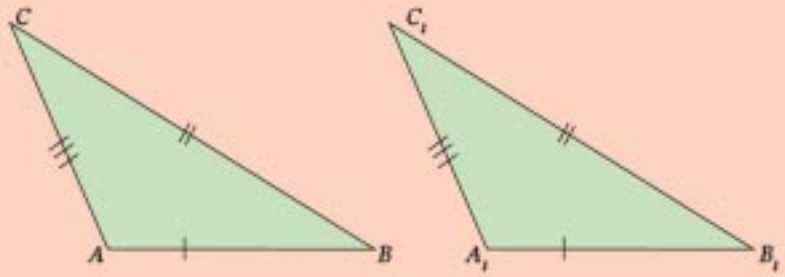
Два троугла су подударна ако су три стране једног троугла једнаке одговарајућим странама другог троугла (цртеж 21).

C: $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$

C: $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$

C: $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

ССС: $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



цртеж 21

Знак се назива **страна-страна-страна**, или скраћено ССС, јер одређује услов подударности два троугла провером дужине три стране једног троугла које одговарају странама другог троугла.

Пример 9

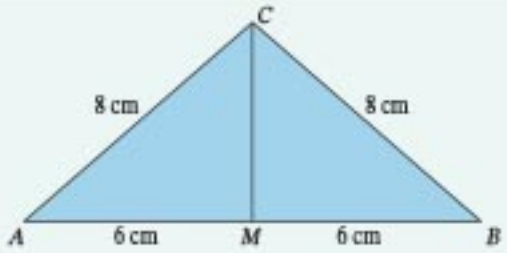
Одреди подударност троуглова *AMC* и *BMC* на *цртежу* 22.

C: $\overline{AM} = \overline{BM}$

C: $\overline{AC} = \overline{BC}$

C: *MC* је заједничка страна.

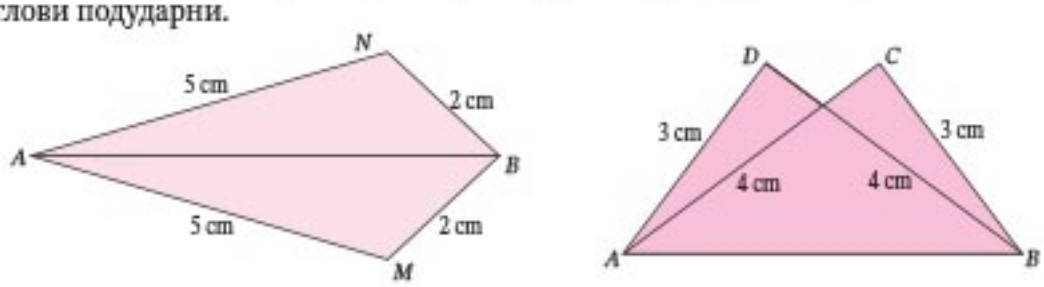
ССС: $\Delta AMC \cong \Delta BMC$



цртеж 22

Задатак 6

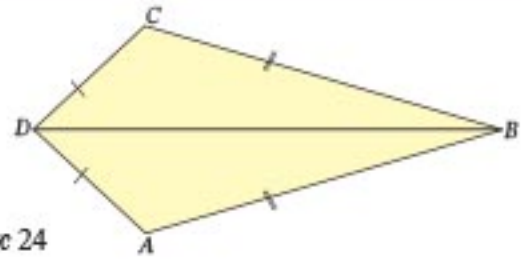
Дводимензионални облици на *цртежу 23* садрже по два троугла. Објасни зашто су ови троуглови подударни.



цртеж 23

Пример 10

Према означеним страницама четвороугла $ABCD$ на *цртежу 24*, објасни зашто је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB$.



цртеж 24

С: $\overline{DA} = \overline{DC}$

С: $\overline{AB} = \overline{CB}$

С: DB је заједничка страна.

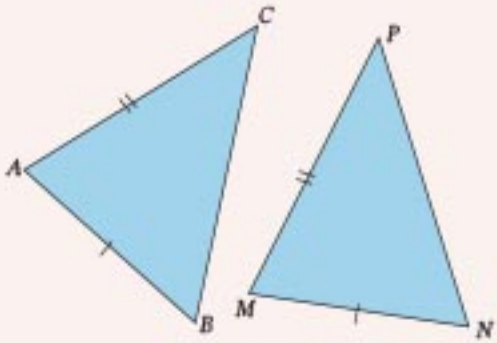
ССС: $\Delta DAB \cong \Delta DCB$

Пошто је угао DAB подударан углу DCB, закључујемо да је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$.

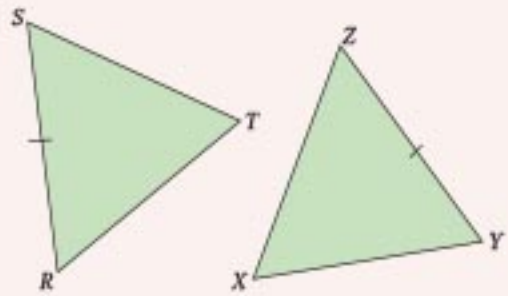
Активност

а) Да ли једнакокраки троуглови ABC (са основом AB) и MNP (са основом MN) могу бити подударни, ако су им означени елементи на *цртежу 25* једнаки?

б) Зашто су једнакостранични троуглови RST и XYZ на *цртежу 26* подударни?



цртеж 25



цртеж 26

- **Два једнакокрака троугла** су подударна ако су основица и страна једног троугла једнаке основици и страни другог троугла.
- **Два једнакостранична троугла** су подударна ако имају једнаке стране.

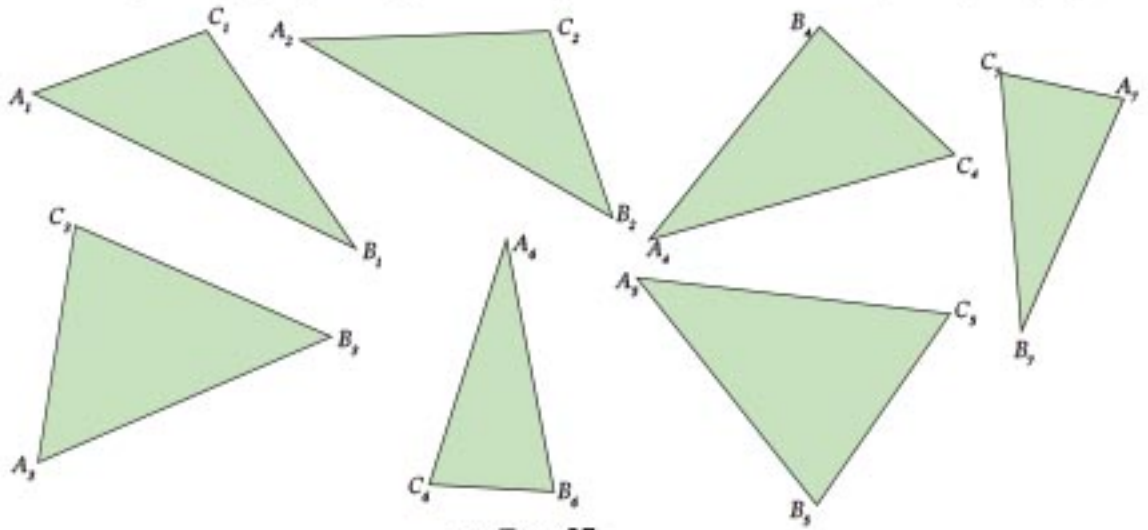
Задатак 7

У једнакокраком троуглу ABC, из темена C је спуштена линија гравитације CC_1. Објасни зашто $\sphericalangle AC_1C = \sphericalangle BC_1C$. Нацртај.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

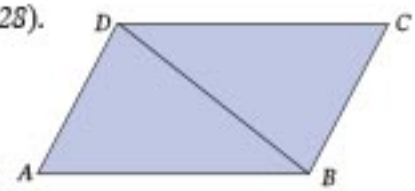
1. Према датим условима, одреди да ли су троуглови подударни, ако
   а) два троугла имају одговарајуће странице дужине 3 cm и два одговарајућа угла величине 35^0 и 80^0,
   б) два троугла имају одговарајуће странице дужине 3 cm, 9 cm и 10 cm.
   в) два троугла имају одговарајуће углове величине 44^0, 78^0 и 58^0.

2. Напиши парове подударних троуглова са *цртежа 27* и знаке по којима су подударни.



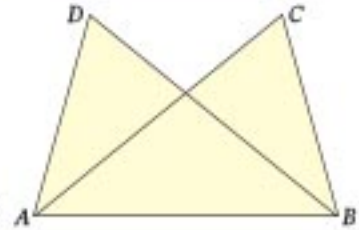
цртеж 27

3. Дуж BD је дијагонала паралелограма $ABCD$ (*цртеж 28*).
   Објасни зашто је $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.



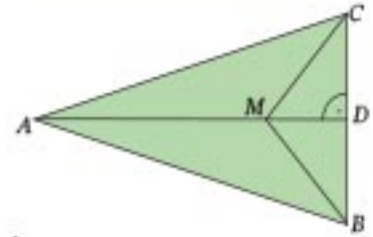
цртеж 28

4. За 2Д облик на *цртежу 29*, важи следеће:
   $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD$.
   Објасни зашто: а) $\overline{AD} = \overline{BC}$ б) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.



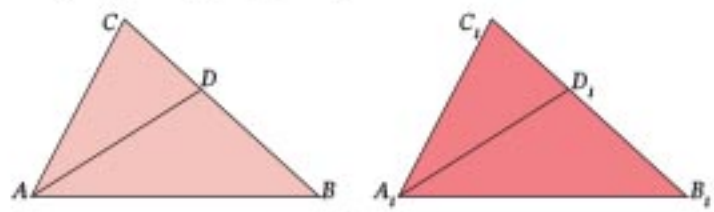
цртеж 29

5. За 2Д облик на *цртежу 30* важи следеће:
   $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$ и $\sphericalangle BMA = \sphericalangle CMA$.
   Објасни зашто $\Delta ABM \cong \Delta ACM$.



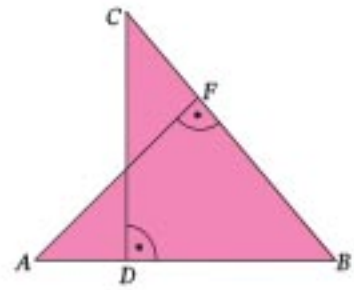
цртеж 30

6. За троуглове ABC и $A_1B_1C_1$ *на цртежу 31* дати су следећи услови:
   1) $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$
   2) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1A_1C_1$
   3) AD и A_1D_1 су симетрале углова у теменима A и A_1, A и A_1
   4) $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$
   Објасни зашто $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$



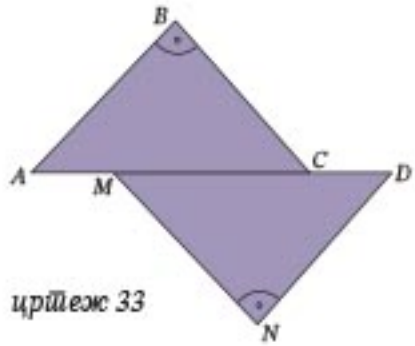
цртеж 31

7. За 2Д облик цртежа 32 важи $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Објасни зашто $\overline{AF} = \overline{CD}$.



цртеж 32

8. За 2Д облик цртежа 33 важи $BC \parallel MN$ и $\overline{AB} = \overline{ND}$.
Објасни зашто: $\Delta ABC \cong \Delta DNM$.

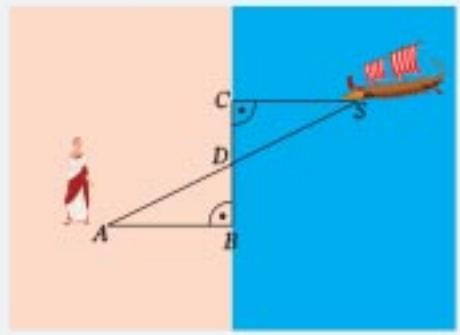


цртеж 33

9. Објасни зашто у једнакокраком троуглу:
а) су једнаке тежишне линије повучене ка странама троугла,
б) су једнаке висине повучене ка странама троугла.
Нацртај.

Истраживање

Старогрчки математичар Талес (624. п. н. е. – 547. п. н. е.) је успео да одреди удаљеност непријатељских бродова од обале током рата. Од тачке C на обали која се налази насупрот броду, ходао је (под правим углом) дуж обале неко произвољно растојање (на пример, 20 корака) до тачке D, где је поставио штап и наставио дуж исте линије на једнаком растојању (20 корака) до тачке B. Затим се кретао под правим углом у унутрашњост до тачке A из које је могао да усмери поглед ка броду преко штап.



Објасни како је Талес одредио растојање до брода, које растојање је измерио?
Зашто је измерено растојање једнако растојању између брода и обале?
Метода, која се приписује Талесу из Милета, коришћена је и за одређивање ширине река, ширине стена и слично.

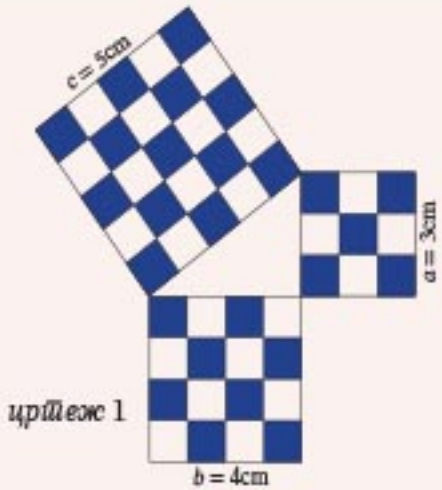
7. ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА

Активност

Дат је правоугли троугао са катетама 3 cm и 4 cm и хипотенузом 5 cm (*цртеж 1*). Сваки од квадрата је подељен на квадрате са страницама 1 cm.

а) Колико квадратића има сваки квадрат?

б) Да ли постоји веза између збира квадратића над катетама и броја квадрата над хипотенузом?



цртеж 1

Сигурно си уочио да постоји веза између збира квадрата над катетама и броја квадрата над хипотенузом. Наиме, број квадрата над:

катетом дужине 3 cm је $3^2 = 9$,

катетом дужине 4 cm је $4^2 = 16$, и

хипотенузом дужине 5 cm је $5^2 = 25$.

То значи да је збир броја квадрата над катетама једнак броју квадратића над хипотенузом, тј. $9 + 16 = 25$.

Својство које си приметио/ла важи за сваки правоугли троугао и познато је као Питагорина теорема, посвећена древном математичару **Питагори**.

Питагорина теорема

У сваком правоуглом троуглу, квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама.

Према томе, у правоуглом троуглу однос између катета a и b и хипотенузе c је одређен формулом

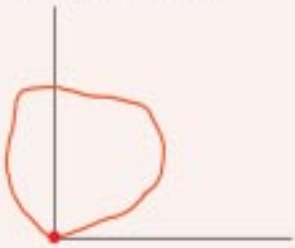
$c^2 = a^2 + b^2$.

Активност

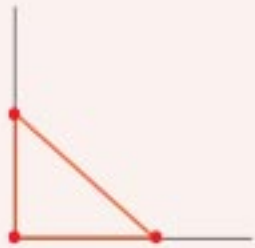
За активност ће ти бити потребно: лист папира, комад стиропора (квадрат са страницама од око 10 cm), ластик и 3 иглице са куглицама на врху за причвршћивање папирних материјала на стиропор.

Припрема: Нацртај прави угао на листу папира. Причврсти лист на стиропор тако што ћеш забости једну од игли у врх правог угла (*цртеж* 2а).

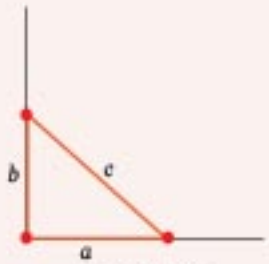
Затим причврсти ластиш на ту иглицу Са друге две, повуци ластиш и причврсти га на сваки од кракова угла (*цртеж 2б*). Измери дужине катета a, b и хипотенузе c (*цртеж 2б*) и провери да ли за њих важи $a^2 + b^2 = c^2$. Помери две иглице дуж катета, поново измери и провери.



цртеж 2а



цртеж 2б



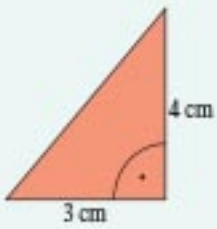
цртеж 2в

Пример 1

Израчунај дужину хипотенузе у правоуглом троуглу, ако је дата катета:
а) $a = 3$ cm и $b = 4$ cm, б) $a = 8$ cm и $b = 10$ cm.

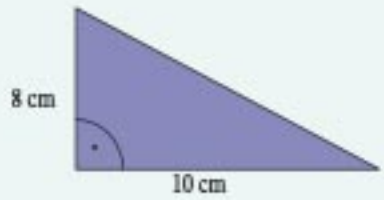
У прорачунима користимо калкулатор и резултат ћемо заокружити на две децимале. Према Питагориновој теореми за хипотенузу c добијмо:

а)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 4^2$
$c^2 = 9 + 16$
$c^2 = 25$
$c = \sqrt{25}$
$c = 5$ cm

б)



$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 10^2 + 8^2$
$c^2 = 100 + 64$
$c^2 = 164$
$c = \sqrt{164}$
$c = 12{,}81$ cm

Уочавамо да приликом израчунавања хипотенузе, уместо формуле $c^2 = a^2 + b^2$, можемо директно да користимо изведену формулу

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Задатак 1

Израчунај дужину хипотенузе c правоуглог троугла ако су дате катете:
а) $a = 24$ cm и $b = 7$ cm, б) $a = 12$ cm и $b = 13$ cm.

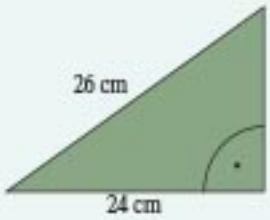
Помоћу Питагорине теореме, можемо да одредимо дужину једне од катета, ако су дате хипотенуза и друга катета.

Пример 2

Израчунај дужину једне катете правоуглог троугла, ако су дате хипотенуза и катета:
а) $c = 26$ cm, $a = 24$ cm, б) $b = 27$ cm и $c = 50$ cm

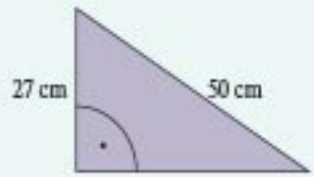
Према Питагориној теореми за непознату катету добијамо:

а)



$c^2 = a^2 + b^2$
$26^2 = 24^2 + b^2$
$676 = 576 + b^2$
$b^2 = 676 - 576$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$ cm

б)



$c^2 = a^2 + b^2$
$50^2 = a^2 + 27^2$
$2500 = a^2 + 729$
$a^2 = 2500 - 729$
$a^2 = 1771$
$a = \sqrt{1771}$
$a = 42{,}08$ cm

Забележимо да приликом израчунавања непознате катете, уместо формуле $c^2 = a^2 + b^2$, можемо директно да користимо изведене формуле:

$a^2 = c^2 - b^2$ или $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ и $b^2 = c^2 - a^2$ или $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Задатак 2

Израчунај дужину једне катете правоуглог троугла ако су дате хипотенуза и друга катета:
а) $c = 15$ cm и $a = 11$ cm, б) $c = 50$ cm и $b = 30$ cm.

Пример 3

Тања иде пешке до школе. Прво пређе 180 m своје улице, затим скреће под углом од 90° и пређе још 240 m до школе (цртеж. 3).
Колика износу дужина дужи чије су крајње тачке Тањина кућа и школа?



цртеж 3

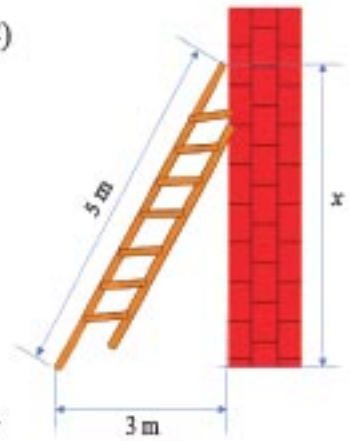
Тања се креће дуж две катете $a = 180$ m и $b = 240$ m правоуглог троугла. Растојање од Тањине куће до школе је хипотенуза с тог троугла. Користећи Питагорину теорему, добијамо

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{180^2 + 240^2} = c = \sqrt{32\,400 + 57\,600} = \sqrt{90\,000} = 300\,\text{m}.$$

Дужина дужи чије су крајње тачке Тањина кућа и школа је 300 m.

Задатак 3

Лествe дужине 5 m наслоњене су на вертикални зид (*цртеж 4*) Подножје мердевина је удаљено 3m од зида. На којој висини изнад тла мердевине додирују зид?



цртеж 4

Важи и обратно својство Питагорине теореме.

Обратна Питагорина теорема

Ако је квадрат најдуже странице једног троугла једнак збиру квадрата друге две странице, онда је тај троугао правоугли.

Помоћу обратне Питагорине теореме, можемо утврдити да ли је троугао правоугли.

Пример 4

Провери да ли је правоугли троугао са страната:
а) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm и $c = 5$ cm, б) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $c = 13$ cm.

а) Према обрнутој Питагориној теореми, троугао је правоугли јер:
$5^2 = 3^2 + 4^2$.
Овај троугао је био познат старим Египћанима, због чега је назван **египатски троугао**.
б) Према Питагориној теореми, троугао је правоугли јер
$13^2 = 5^2 + 12^2$.
Овај троугао је био познат старим Индијцима, због чега је назван **индијски троугао**.

Природни бројеви a, b и c, за које важи једначина $a^2 + b^2 = c^2$, односно који могу бити странице правоуглог троугла, називају се Питагорине тројке.
Питагорину тројку записујемо као подређену тројку бројева (a, b, c)

Питагорине тројке су, на пример, (3, 4, 5), (12, 5, 13), (20, 21, 29) итд.

Задатак 4

Провери да ли су Питагорине тројке дате тројке бројева:
а) (10, 11, 14), б) (6,8,10), в) (9,12,15), г) (10,24,26), д) (15,36,39).

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Одреди хипотенузу правоуглог троугла, ако су његове две катете:
   а) $a = 6$ cm и $b = 12$cm, б) $a = 8$ cm и $b = 6$cm,
   в) $a = 12$ cm и $b = 16$cm, г) $a = 10$ cm и $b = 24$ cm.

2. Одреди једну катету правоуглог троугла ако хипотенуза и друга катета имају дужине:
   а) $c = 20$ cm и $b = 12$ cm, б) $c = 10$ cm и $a = 8$ cm,
   в) $c = 25$ cm и $b = 15$ cm, г) $c = 34$ cm и $a = 16$ cm.

3. Два брода су испловила из луке истовремено, један је ишао ка западу брзином од 24 km/h, а други ка северу брзином од 26 km/h. Израчунај колико ће бродови бити удаљени један од другог после:
   а) 1 сата, б) 2 сата од поласка.

4. Израчунај обим правоуглог троугла ако су дати хипотенуза и једна катета:
   а) $c = 29$ cm и $b = 21$ cm,
   б) $c = 34$ cm и $b = 16$ cm,
   в) $c = 17$ cm и $b = 15$ cm.

5. У сеоском дворишту, кућа и бунар су удаљени 14 m, бунар и штала су удаљени 48 m, а штала и кокошињац су удаљени 30 m (*цртеж 5*).
   а) Колико је растојање између куће и штале?
   б) Колико је растојање између куће и *цртеж 5*кокошиња?



цртеж 5

6. Провери да ли је троугао правоугли, ако је:
   а) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm и $c = 39$ cm, б) $a = 9$ cm, $b = 12$ cm и $c = 15$ cm,
   в) $a = 20$ cm, $b = 13$ cm и $c = 25$ cm, г) $a = 12$ cm, $b = 7$ cm и $c = 15$ cm.

7. **Пројектна активност**

   1. Састављамо питагорине тројке

   Питагорине тројке састављамо (a, b, c) користећи Еуклидове формуле.
   Нека су m и n било који природни бројеви такви да је $m > n$. Бројеви a, b и c који чине питагорину тројку добијамо формулама:
   $a = (m^2 - n^2)$ k, $b = 2mnk$ и $c = (m^2 + n^2)k$.
   На пример, за $m = 2$, $n = 1$ и $k = 1$ добијамо
   $a = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{4}$ и $c = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = \mathbf{5}$,
   за $m = 3$, $n = 1$ и $k = 1$, добиваме
   $a = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = \mathbf{8}$, $b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{6}$ и $c = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = \mathbf{10}$.

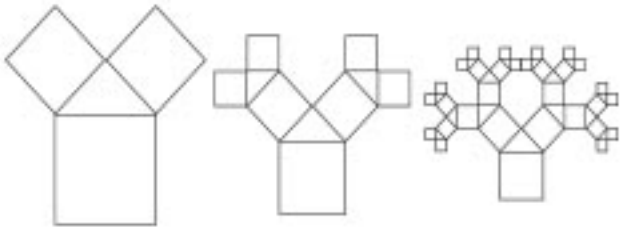
Прецртај и попуни дате табеле.

$m = 2, n = 1$ и $k = 1$	a	b	c
$m = 3, n = 1$ и $k = 1$			
$m = 4, n = 1$ и $k = 1$			
$m = 5, n = 1$ и $k = 1$			
$m = 6, n = 1$ и $k = 1$			

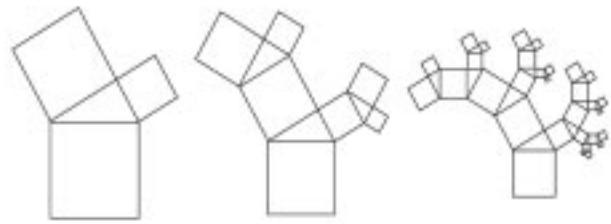
$m = 3, n = 2$ и $k = 1$	a	b	c
$m = 4, n = 2$ и $k = 1$			
$m = 5, n = 2$ и $k = 1$			
$m = 6, n = 2$ и $k = 1$			
$m = 7, n = 2$ и $k = 1$			

2. Креирамо питагорино дрво

У Питагорином дрвету, дужине страница његових грана и листова имају мерне бројеве који су питагорине тројке. Питагорино дрво почињемо да формирамо од корена цртањем квадрата преко којег конструишемо правоугли троугао, који може бити једнакокрак (*цртеж* 6а) или једнакостранични (*цртеж* 6б).



цртеж 6а



цртеж 6б

Продужавамо конструисањем квадрата над катетама, затим над квадратима нових правоуглих троуглова и тако градимо нашу креацију.

Примери питагориних стабала дати су на цртежу 7а и цртежу 7б.



цртеж 7а



цртеж 7б

Твој задатак је да направиш своје Питагорино дрво на папиру, почевши од квадрата са страном од 5 cm и изнад њега:

а) једнакокраки правоугли троугао, б) вишестрани правоугли троугао.

Можеш да планираш облик дебла, грана и лишћа како желиш и саставиш га постављањем троуглова у различите положаје.

Истраживање



1. Питагорина теорема је једна од најважнијих и најпримењиванијих теорема у геометрији. Име је добила у част древног математичара и филозофа Питагоре, који је живео у 6. веку пре нове ере.
   Помоћу интернета потражи информације о животу древног математичара Питагоре и његовим открићима.
2. Метеоролози једне метеоролошке станице посматрају облак у атмосфери. Мерењем су утврдили да:
   - растојање дуж тла од метеоролошке станице до тачке која се налази вертикално испод облака износи $d = 4$ km,
   - висина облака изнад тла је $h = 1{,}5$ km.

   Растојање од метеоролошке станице до облака означено је са L.
   а) Прикажи ситуацију скицом и означи катете и хипотенузу правоуглог троугла.
   б) Применом Питагорине теореме, израчунај растојање L од метеоролошке станице до облака. Заокружи резултат на најближих 0,1 km.
   в) Објасни како би научници могли да провере тачност мерења користећи обратну Питагорину теорему, ако би одвојено измерили три дужине (две катете и хипотенузу).
   г) Истражи у којим случајевима грешка у мерењима са тачношћу од 0,1 km може бити критична у метеорологији (за летове авиона или за прогнозу времена).

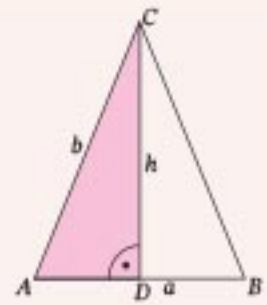
8. ПРИМЕНА ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ НА ТРОУГЛОВЕ

Активност

На цртежу 1 дат је једнакокраки троугао ABC са основом a и страницом b. Из темена C, висина h је повучена до основе.

а) Да ли су троуглови ADC и BCD правоугли?

б) Да ли је $\overline{AD} = \overline{DB}$?



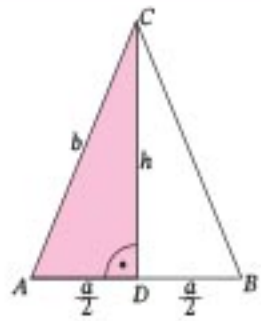
цртеж 1

У једнакокраком троуглу ABC, висина h повучена до основе a дели једнакокраки троугао ABC на два подударна правоугла троугла ADC и BDC (цртеж 2).

Према Питагориној теореми, добијамо формулу за израчунавање странице b једнакокраког троугла.

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

где је h висина троугла, a а је основа троугла.



цртеж 2

Пример 1

У једнакокраком троуглу израчунај:

а) страницу b, ако је $a = 16$ cm и $h = 15$ cm, б) висину h, ако је $a = 10$ и $b = 13$ cm,

в) основу a, ако је $b = 25$ m и $h = 24$ m.

Према Питагориној теореми, заменом у одговарајуће формуле, добијамо

а) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$

$b^2 = 15^2 + 8^2$

$b^2 = 289$

$b = \sqrt{289}$

$b = 17$ cm.

б) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$

$h^2 = 13^2 - 5^2$

$h^2 = 144$

$h = \sqrt{144} = 12$ cm.

$h = 12$ cm.

в) $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 25^2 - 24^2$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 49$

$\frac{a}{2} = 7$

$a = 14$ cm.

Задатак 1

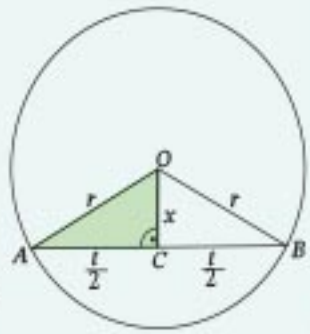
Израчунај обим једнакокраког троугла са основицом од 18 cm и висином од 12 cm.
Изради цртеж.
Упутство: Обим једнакокраког троугла се израчунава помоћу формуле
$L = a + 2b$, где је a основица, а b страница једнакокраког троугла.

Пример 2

У кругу полупречника $r = 8$ cm нацртана је тетива $t = 12{,}8$ cm. Израчунај растојање тетиве од центра круга (цртеж 3).

Троугао ABO је једнакокраки троугао са страницама $\overline{AO} = \overline{BO} = r$.
Растојање $\overline{OC} = x$ је висина правоуглог троугла ABO.
Користећи Питагорину теорему, добијамо

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 8^2 - \left(\frac{12{,}8}{2}\right)^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04\,,\ x = 4{,}8 \text{ cm}.$$



цртеж 3

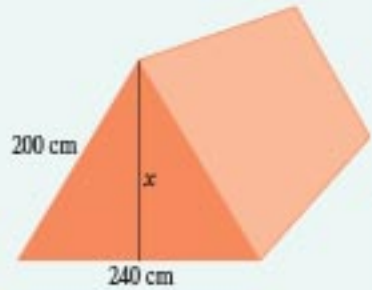
Пример 3

Драган треба да купи цев за подупирање свог шатора, чији је улаз у облику једнакокраког троугла са катетом од 200 cm и основицом од 240 cm (слика 1). Колика је дужина цеви коју Драган треба да купи?

Дужина цеви x је висина једнакокраког троугла са основом 240 cm и страницом 200 cm.
Користећи Питагорину теорему добијамо да

$$x^2 = 200^2 - \left(\frac{240}{2}\right)^2 = 200^2 - 120^2 = 25600\,,\ \ x = 160 \text{ cm}.$$

Дужина цеви коју Драган треба да купи је 160 cm.

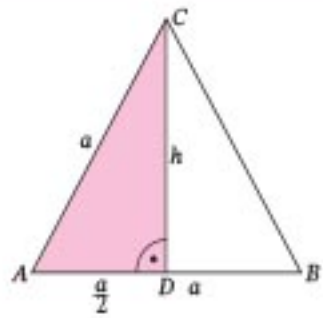


слика 1

Повлачењем било које висине h, једнакостранични троугао ABC се дели на два подударна правоугла троугла (цртеж 4). Према Питагориној теореми, добијамо формулу за израчунавање странице a једнакостраничног троугла

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

где је h висина једнакостраничног троугла.



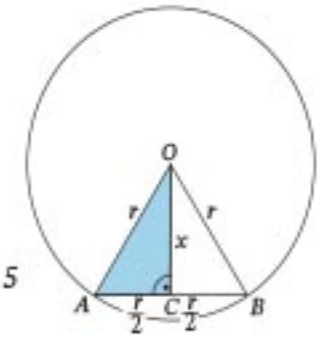
цртеж 4

Задатак 2

У једнакостраничном троуглу израчунај висину h, ако је страница $a = 10$ cm.

Задатак 3

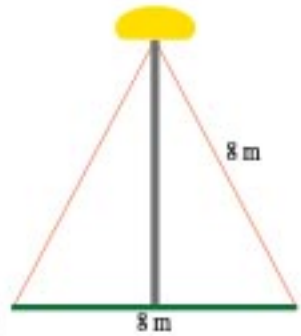
У кругу полупречника $r = 8$ cm нацртана је тетива дужине једнаке полупречнику круга.
Израчунај растојање x тетиве од центра круга (цртеж 5).



цртеж 5

Задатак 4

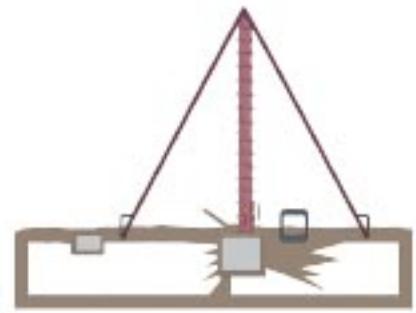
На школском игралишту постављена је светиљка на стуб дужине 8 m који је ослоњен на два симетрична носача сваки дужине 8 m (слика 2).
Колико је висок стуб ако је растојање између два носача мерено на тлу 8 m?



слика 2

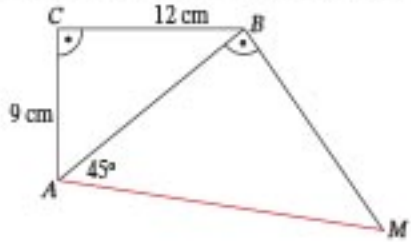
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

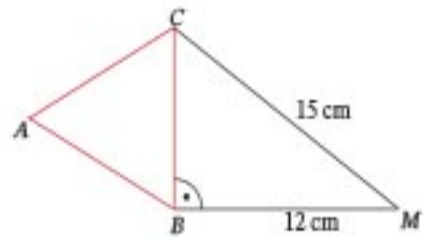
1. Израчунај висину једнакокраког троугла, ако су познати његова основица и катета:
   а) $a = 7$ cm и $b = 5{,}5$ cm, б) $a = 18$ cm и $b = 15$ cm.
2. Израчунај крак једнакокраког троугла са датом основицом a и висином до основе h:
   а) $a = 14$ cm и $h = 24$ cm, б) $a = 24$ dm и $h = 16$ dm.
3. Израчунај висину једнакостраничног троугла са страницом:
   а) $a = 8$ cm, б) $a = 10$ cm.
4. Израчунај дужину крака једнакокраког правоуглог троугла, ако је хипотенуза дугачка 10 cm.
5. Стуб висине 40 m је везан челичним конопцима за клинове забијене у земљу на растојању од 9 m од његове основе (слика 3).
   Колика је дужина челичних ужади?



слика 3

6. Према подацима датим на цртежу 6, израчунај:
а) дужину дужи AM,
б) обим једнакостраничног троугла ABC.





цртеж 6

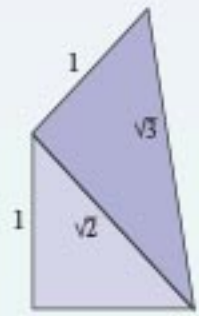
7. У средини кружног језера постављена је скулптура пречника 60 метара. Преко језера је изграђен мост дужине 48 метара (слика 4). Од средине моста треба да се постави мањи монтажни мост који ће водити до скулптуре. Колика ће бити његова дужина?



слика 4

Истраживање

Да бисмо конструисали дуж дужине $\sqrt{2}$ у изабраној јединици мере, потребно је да конструишемо правоугли троугао са катетом 1.
Ако је на цртежу на којем смо конструисали дуж дужине $\sqrt{2}$, Конструишемо правоугли троугао са катетама дужине $\sqrt{2}$ и дужине 1, дужина хипотенузе ће бити једнака $\sqrt{3}$ ($(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$) (цртеж 7).
Објасни поступак, којим ћеш моћи у једном истом цртежу да конструишеш дужи дужине:
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$.



цртеж 7

9. ЧЕТВОРУГАО, ПАРАЛЕЛОГРАМ. ПРАВОУГАО, РОМБ И КВАДРАТ

Активност

а) Наведи називе четвороуглова на цртежу 1.



цртеж 1

б) Наведи нека својства паралелограма, правоугаоника, ромбова и квадрата која знаш.

Четвороугао

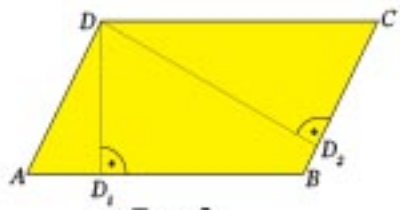


цртеж 2

Разгледај четвороугао $ABCD$ на цртежу 2. Подсетимо се да су тачке A, B, C и D **темена** четвороугла, а да су дужи AB, BC, CD и DA стране четвороугла.
Углови α, β, γ и δ су унутрашњи углови (скраћено, углови) четвороугла.
Два темена која леже на истој страни називају се **суседна темена**, а два темена која не леже на истој страни називају се **супротна темена**.
На пример, темена A и B су суседна, а темена A и C су **супротна темена**. Две странице које деле заједничко темено називају се **суседне стране**, а две странице које не деле заједничко темено називају се супротне странице. У том смислу, странице AB и BC су суседне, а странице AB и CD су **супротне стране**.
Углови који леже на истој страни називају се **суседни углови**, а углови који не леже на истој страни називају се **супротни углови**.
Збир углова у четвороуглу је $360°$, односно $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Паралелограм

Подсетимо се да се четвороугао са два пара паралелних страница назива **паралелограм**.
Растојање између паралелних страница у паралелограму назива се **висина паралелограма**.
Исто тако, знамо да се дуж чије су крајње тачке два супротна темена назива **дијагонала паралелограма**.



цртеж 3а



цртеж 3б

На цртежу 3а дат је паралелограм ABCD. Дужи DD_1 и DD_2 су висине спуштене из темена D на странице AB и BC, одговарајуће. Треба напоменути да сваки паралелограм има две висине. На слици 3б дат је паралелограм $ABCD$. Дужи AC и BD су дијагонале паралелограма. Сваки паралелограм има две дијагонале.

Задатак 1

Нацртај произвољан паралелограм, а затим означи његова темена и углове. Запиши парове: суседна темена, наспрамна темена, суседне углове и наспрамне углове. Нацртај његове: а) висине, б) дијагонале.

Користећи знаке подударности троуглова, могу се објаснити нека својства паралелограма које си претходно проучавао.

Разгледај паралелограм $ABCD$ на *цртежу 4а*. За троуглове ABD и CDB важи:

A: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ Као наизменични углови трансверзале BD паралелних правих AB и CD.

C: BD је заједничка страница,

A: $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ Као наизменични углови трансверзале BD паралелних правих AD и BC.

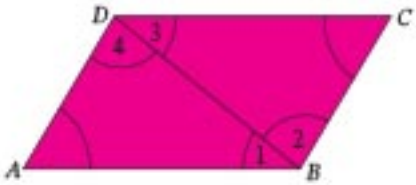
ACA: $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

Из подударности троуглова ABD и CDB добијамо да су одговарајуће странице и углови једнаки. Тачније, једнаки су:

супротне странице $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{CB}$, и

супротни углови $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \sphericalangle ADC$.

Углови α и δ су суплементни углови, као супротни углови трансверзале AD паралелних правих AB и CD (*цртеж 4б*), односно $\alpha + \delta = 180°$.



цртеж 4а



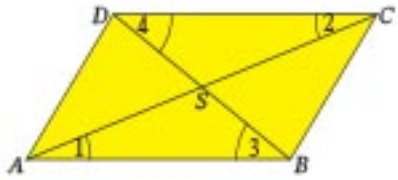
цртеж 4б

- Свака дијагонала дели паралелограм на два подударна троугла.
- У сваком паралелограму, супротне странице су међусобно једнаке.
- У сваком паралелограму, супротни углови су међусобно једнаки.
- У сваком паралелограму, суседни углови су суплементни.

Задатак 2

Користећи знаке подударности троуглова, објасни зашто се у сваком паралелограму дијагонале преполовљавају у тачки пресека.

Упутство: Одредити да је $\Delta ABS \cong \Delta CDS$



цртеж 5

Пример 1

Израчунај остале углове паралелограма ако је један од његових углова 70°.

$\alpha = 70°$.	
$\gamma = 70°$	Наспрамни углови у паралелограму су једнаки.
$\alpha + \beta = 180°$	Суседни углови у паралелограму су суплементни.
$70° + \beta = 180°$	
$\beta = 110°$	
$\delta = \beta = 110°$	Наспрамни углови у паралелограму су једнаки.

Задатак 3

Нови стакленик се гради у ботаничком парку. Основа баште треба да буде у облику паралелограма *ABCD*. Архитекта је обележио тачке *A*, *B*, *C* и *D* на тлу и измерио да је угао у темену *A* 72°. Израчунај углове у паралелограму.

Задатак 4

Збир два супротна угла у датом паралелограму је 142°. Израчунај углове у паралелограму.

Правоугаоници, ромбови и квадрати су паралелограми, тако да се општа својства паралелограма односе и на њих. У наставку ћемо представити неколико посебних својстава правоугаоника, ромбова и квадрата које можеш применити у решавању проблема.

Правоугаоник

Подсети се да се паралелограм у коме су сви углови прави назива **правоугаоник.**

Цртеж 6 приказује правоугаоник *ABCD* са дијагоналама *AC* и *BD*.

За троуглове *ABC* и *BAD* имамо:

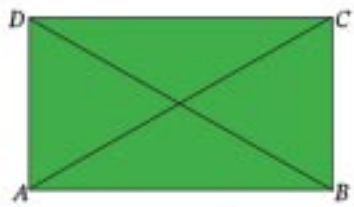


цртеж 6

C: *AB* је заједничка страница,	
A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$	Паралелограм *ABCD* је правоугаоник.
C: $\overline{AD} = \overline{BC}$,	Као супротне странице паралелограма.
CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.	
$\overline{AC} = \overline{BD}$	Као одговарајуће странице подударних троуглова *ABC* и *BAD*.

Дијагонале у сваком правоугаонику су међусобно једнаке.

На *цртежу 7* дат је паралелограм $ABCD$ са једнаким дијагоналама.



цртеж 7

За троуглове ABC и BAD имамо:

С: AB је заједничка страница,

С: $\overline{AC} = \overline{BD}$, Према услову за дијагонале паралелограма.

С: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Као супротне странице паралелограма.

ССС: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ Као одговарајући углови у подударним троугловима ABC и BAD

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ Као суседни углови у паралелограму.

Од $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180°$, добијамо да $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90°$.

Ако су дијагонале паралелограма једнаке, онда је тај паралелограм правоугаоник.

Пример 2

Дијагонале правоугаоника $ABCD$ секу се у тачки S.

а) Напиши све парове подударних троуглова чија су темена A, B, C, D или S.

б) Који од њих су једнакокраки, а који правоугли троуглови?

а) $\Delta ABS \cong \Delta DCS$, $\Delta BSC \cong \Delta ASD$, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$, $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, $\Delta BAD \cong \Delta DCB$, $\Delta BAD \cong \Delta CDA$ и $\Delta DCB \cong \Delta CDA$.

б) Једнакокраки су: ΔABS, ΔDSC, ΔBSC и ΔASD.
Правоугли су: ΔABC, ΔBAD, ΔBCD и ΔCDA.

Пример 3

Већи угао који захватају дијагонале AC и BD правоугаоника $ABCD$ је 130°. Који су углови које захватају дијагонале са страницама правоугаоника?

Означи са S тачку пресека дијагонала AC и BD. Са *цртежа 8* видимо да:

$\sphericalangle 1 = 130°$ Као унакрсни углови

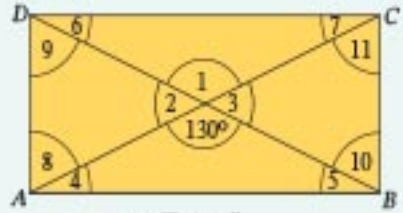
$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 180° - 130° = 50°$ Као паралелни углови.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5 = 25°$ Као углови основе једнакокраког троугла ABS.

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 7 = 25°$ Као углови у основи једнакокраког троугла DSC

$\sphericalangle 8 = \sphericalangle 9 = 65°$ Као углови основе једнакокраког троугла ASD.

$\sphericalangle 10 = \sphericalangle 11 = 65°$ Како агли на основата на рамнокракиот триаголник BSC.



цртеж 8

Задатак 5

У правоугаонику $ABCD$, угао између дијагонале AC и странице AD је $32°$.
а) Израчунај угао између дијагонале AC и странице BC.
б) Наћи остале углове које дијагонала AC формира са страницама.
в) Колики је угао између дијагонала AC и BD?

Задатак 6

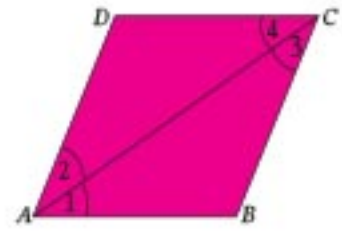
У правоугаоној просторији $ABCD$, од тачке A до супротног темена C на плафон је постављена трака. Трака захвата угао од $52°$ са страном AB.
а) Нацртај правоугаоник $ABCD$.
а) Колики је угао који трака захвата са страном AD?
б) Колики је угао између траке и странице BC?

Ромб

Подсетимо се да се паралелограм у коме су све странице једнаке назива **ромб.**

За ромб $ABCD$ на цртежу 9, важи:

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$ Као супротни углови у паралелограму.



цртеж 9

За једнакокраке троуглове ABC и ADC, важи:

С: AC је заједничка страница,

С: $\overline{AB} = \overline{AD}$, Све странице ромба су једнаке.

С: $\overline{BC} = \overline{CD}$,

ССС: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ и $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ Као одговарајуће углове подударних троуглова ABC и ADC.

Видимо да је AC симетрала угла у темену A и угла у темену C.

На сличан начин, можемо да објаснимо да је BD симетрала угла у темену B и угла у темену D.

Дијагонале у сваком ромбу су симетрале супротних углова.

На *цртежу 10*, дат је ромб $ABCD$ са дијагоналама AC и BD које се секу у тачки S.

За троуглове ΔABS и ΔCBS, важи следеће:

С: BS је заједничка страница,

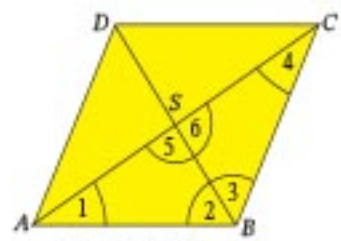
С: $\overline{AB} = \overline{BC}$, Све странице ромба су једнаке.

С: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Дијагонале ромба су преполовљене.

ССС: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

ССС: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ Као одговарајући углови подударних троуглова ΔABS и ΔCBS.



цртеж 10

Из $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$ и $\sphericalangle 5 + \sphericalangle 6 = 180°$, добијамо да је $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 = 90°$.

Дијагонале AC и BD су једна на другу нормалне ($AC \perp BD$).

Дијагонале у сваком ромбу су међусобно нормалне.

На *цртеж 11* приказан је паралелограм *ABCD* са међусобно нормалним дијагоналама *AC* и *BD*.

За троуглове ΔABS и ΔCBS важи следеће

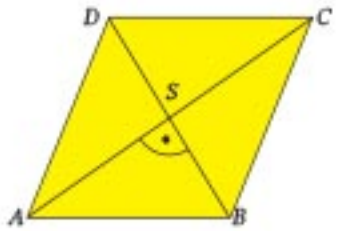
C: *BS* је заједничка страница,

A: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90°$, Према услову за нормалност дијагонала паралелограма.

C: $\overline{AS} = \overline{CS}$, Дијагонале паралелограма су преполовљене.

CAC: $\Delta ABS \cong \Delta CBS$.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ Као одговарајуће странице подударних троуглова ΔABS и ΔCBS.



Слика 11

Ако су у једном паралелограму дијагонале међусобно нормалне, онда је то ромб.

Задатак 7

У ромбу *ABCD*, тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 су средишта страница *AB, BC, CD и DA*, одговарајуће. Каква врста паралелограма се добија спајањем ових тачака? Објасни свој одговор.

Пример 4

Израчунај дужину краће дијагонале ромба, ако је дужина странице 5 cm, а један од његових углова је 120°?

Ромб *ABCD* који испуњава услове задатка дат је на *цртежу 12*. Имамо:

$\sphericalangle 1 = 120°$ Као супротни углови у ромбу.

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ Као супротни углови у ромбу.

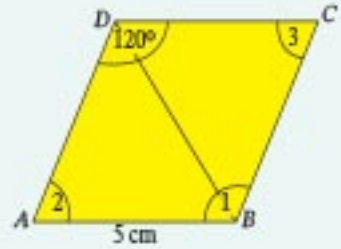
$120° + 120° + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 360°$ Збир углова у ромбу је 360°.

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120°$

Из $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ и $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 120°$ налазимо да је $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = 60°$.

Троугао *ABD* је једнакостранични троугао, попут једнакокраког троугла са углом у врху од 60°.

Стога је краћа дијагонала износи задача 5 cm.

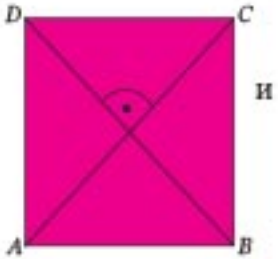


Слика 12

Квадрат

Пошто је сваки квадрат правоугаоник са једнаким страницама а и ромб је са правим угловима, сва својства која важе за правоугаонике ромбове важе и за квадрате. Поред тога, квадрати имају следећа додатна својства.

Дијагонале у квадрату су једнаке, јер је правоугаоник, исто тако су и нормалне, јер је и он ромб (*цртеж 13*).



и

цртеж 13

- Дијагонале у сваком квадрату су једнаке и међусобно нормалне.
- Ако су дијагонале у паралелограму једнаке и међусобно нормалне, онда је то квадрат.

Пример 5

У музеју се налази интерактивна изложба у квадратној сали $ABCD$. У теменима A, B, C и D су постављени уређаји који емитују ласерске.
Када се изложба укључи, зрак се емитује из темена A према темену C (дуж дијагонале AC), а зрак се емитује из темена B према темену D (дуж дијагонале BD).
Уређаји су програмирани тако да се сваки пут када се два зрака пресеку, активира светлосни ефекат.
а) Под којим углом се секу зраци AC и BD?
б) Да ли су дијагонале AC и BD једнаке? Објасните зашто.
в) Који угао заклапа дијагонала AC са страницом AB?

Сала има облик квадрата. Зато:
а) се зраци AC и BD секу под правим углом,
б) су дијагонале AC и BD једнаке,
в) дијагонала AC захвата угао од 45° са страницом AB.

Задатак 8

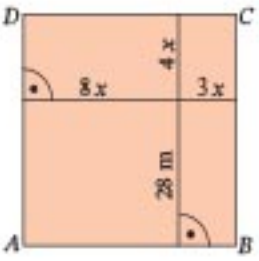
У квадрату $ABCD$, тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 су средишта страница AB, BC, CD и DA, одговарајуће. Какав паралелограм се добија спајањем ових тачака?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Збир два супротна угла у паралелограму је 94°. Наћи величину сваког угла паралелограма.
2. Израчунај углове паралелограма ако је познато да је један од његових углова 2 пута већи од другог.
3. Већа дијагонала ромба заклапа угао од 35° са страницом. Наћи углове ромба.
4. Наћи углове ромба ако је једна од његових дијагонала једнака страници.
5. Страница правоугаоника дужине 6 cm захвата угао од 60° са дијагоналом. Израчунај дужину дијагонале.
6. Дијагонале правоугаоника се секу под углом од 132°. Израчунај углове између дијагонала и страница правоугаоника.
7. Угао између висине и странице ромба је 34°. Израчунај углове ромба.
8. Израчунај углове између дијагонала и страница ромба ако је један угао ромба 46°.
9. Наћи углове ромба ако је угао између висине и мање дијагонале 35°.

10. У правоугаонику $ABCD$, тачка M је средиште странице AB. Кроз тачку M је повучена права линија која сече страну CD у тачки N тако што је угао $BMN = 75°$. Нацртај цртеж, а затим израчунај угао: а) MNC, б) AMN.

11. Парцела квадратног облика је подељена на делове као на *цртежу 14*. Нађи димензије (странице) парцеле.



цртеж 14

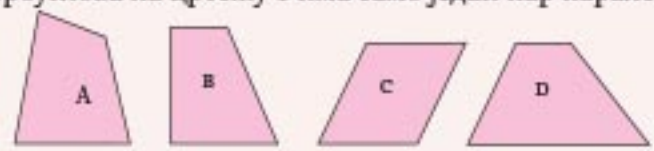
Истраживање

На стиропор постави комад папира на коме је нацртана квадратна мрежа. Затим постави 4 иглице као темена четвороугла и затегни ластиж око њих. Испитај својства паралелограма променом положаја иглица. Испитај када је један четвороугао паралелограм у зависности од положаја пресека дијагонала. Када је тај паралелограм ромб? Какву промену на дијагонали паралелограма треба да направиш да би се добио правоугаоник?

10. ТРАПЕЗ И ДЕЛТОИД

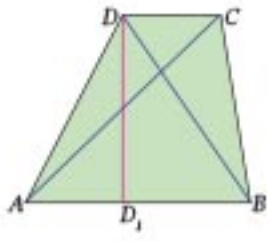
Активност

Који од датих четвороуглова на цртежу 1 има само један пар паралелних страница?



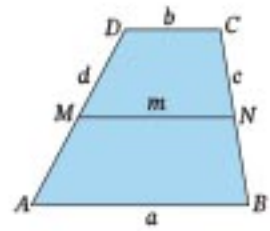
цртеж 1

Подсети се да се четвороугао који има само један пар паралелних страница назива **трапез**.
На цртежу 2 приказан је трапез $ABCD$. Странице AB и CD су паралелне и називају се **основице** (горња и доња основица), а **странице** AD и BC нису паралелне и називају се **краци** трапеза. Растојање између паралелних страница назива се **висина трапеза**. Дуж која спаја два супротна темена назива се **дијагонала трапеза**. Дуж DD_1 је висина трапеза, а дужи AC и BD су дијагонале трапеза.



цртеж 2

Ако са M означимо средиште крака AD, а са N средиште крака BC, онда је дуж MN средиште трапеза $ABCD$ (*цртеж 3*).
Дужине основица означене су са
$a = \overline{AB}$, $b = \overline{CD}$, дужине кракова са $c = \overline{BC}$ и $d = \overline{AD}$,
а дужина средње линије са $m = \overline{MN}$.



цртеж 3

Дуж која спаја средишње тачке кракова трапеза назива се **средња линија** трапеза.

Задатак 1

Нацртај произвољан трапез, а затим нацртај:
а) висине, б) дијагонале, в) средњу линију.

Средња линија трапеза је паралелна са основама и њена дужина је једнака половини збира од дужина основа.

Према томе, дужина средње линије m трапеза израчунава се формулом

$$m = \frac{a+b}{2},$$

где су a и b основе трапеза.

Пример 1

Израчунај средњу линију трапеза, ако су му основе дугачке 8 cm и 5 cm.

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{8+5}{2} = 6{,}5\,\text{cm}$ Замењујемо у формулу за средњу линију трапеза.

Задатак 2

Израчунај дужину средње линије трапеза са основама:
а) a = 17 cm и b = 11 cm, б) a = 4,2 dm и b = 28 cm.

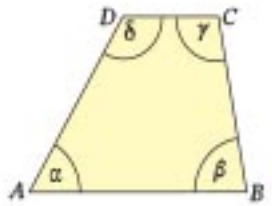
Задатак 3

Основе трапеза се разликују за 10 cm. Израчунај њихову дужину ако је дужина средње линије $m = 15$ cm.

Углови α, β, γ и δ су унутрашњи углови трапеза $ABCD$ *на цртежу* 4.
Ако продужимо странице трапеза до правих линија, добијамо

$\alpha + \delta = 180°$ Као супротне углове трансверзале AD паралелних правих AB и DC.

$\beta + \gamma = 180°$ Као супротне углове трансверзале BC цртеж 4 паралелних правих AB и DC.

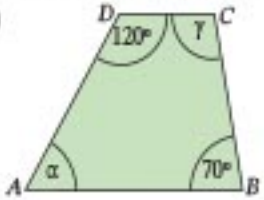


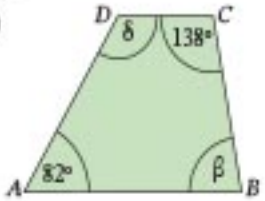
цртеж 4

Углови који леже на истом краку трапеза су суплементни.

Пример 2

Израчунај углове трапеза датог на слици 5:

а)


б)


цртеж 5

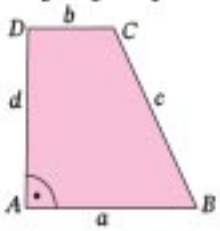
Пошто су углови који леже на истом краку суплементни, добијамо:

а) $\alpha + 120° = 180°$, $\alpha = 60°$;
$70° + \gamma = 180°$, $\gamma = 110°$.

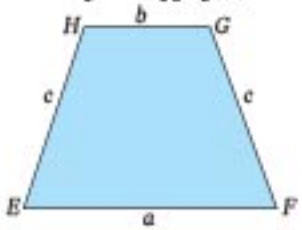
б) $\delta + 82° = 180°$, $\delta = 98°$;
$\beta + 138° = 180°$, $\beta = 42°$.

Трапез код кога је један од кракова нормалан на основе назива се **правоугли трапез**.
Трапез са једнаким крацима назива се **једнакокраки трапез**.

На цртежу 6а приказан је правоугли трапез, а слика 6б приказује једнакокраки трапез.



цртеж 6а

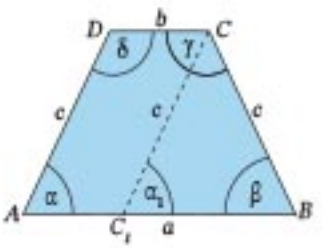


цртеж 6б

Задатак 4

Нацртај произвољан једнакокраки трапез, а затим нацртај његову:
а) висину б) дијагонале в) средњу линију

На цртежу 7 приказан је једнакокраки трапез $ABCD$.
Са дужи CC_1 паралелном на AD, трапез је подељен на једнакокраки троугао *цртеж* $7C_1BC$ и паралелограм AC_1CD.



цртеж 7

$\alpha_1 = \beta$ Као углови у основи једнакокраког троугла C_1BC.

$\alpha_1 = \alpha$ Као подударни углови на трансверзали AB за паралелне праве C_1C и AD.

$\beta = \alpha$ Следи из две горње једначине.

Углови у сваком једнакокраком трапезу који леже на истој основи су једнаки.

Пример 3

Израчунај углове у једнакокраком трапезоиду $ABCD$, ако је један од њих $\alpha = 68°$ (*црт. 8*)

$\beta = \alpha = 68°$ Углови су једнаки као углови који леже на истој основи AB.

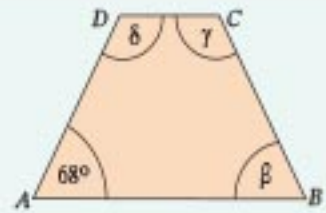
$\alpha + \delta = 180°$ Углови су суплементарни као углови који леже на истом краку AD.

$68° + \delta = 180°$ Замењујемо и израчунавамо

$\delta = 180° - 68°$

$\delta = 112°$.

$\gamma = \delta = 112°$ Углови су једнаки ако леже на истој основи CD.



цртеж 8

Задатак 5

Збир углова који леже на једној од основица једнакокраког трапеза је 150° 20′. Израчунај остале углове на трапезу.

На *цртежу 9* дат је једнакокраки трапез $ABCD$. За троуглове ABC и BAD имамо:

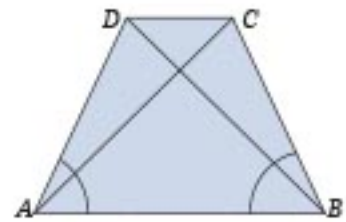
C: AB је заједничка страна,

A: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$, Као углови у основици AB једнакокраког трапеза.

C: $\overline{AD} = \overline{BC}$, Трапез $ABCD$ је једнакокрак по услову у задатку.

CAC: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

$\overline{AC} = \overline{BD}$ Као одговарајуће странице у подударним троугловима.

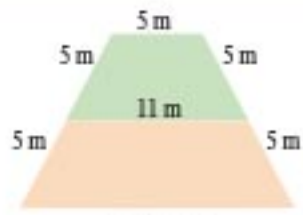


цртеж 9

Дијагонале у једнакокраком трапезу су једнаке.

Пример 4

Површина са цвећем у школском дворишту има облик једнакостраног трапеза (*слика 1*). Горња основица је једнака са крацима и дугачка је 5 m, а доња основица је дуга 11 m. Школа планира да прошири травњак удвостручавањем његове дужине, а затим ограђивањем. Колико метара ограде је потребно за цео тревњак?



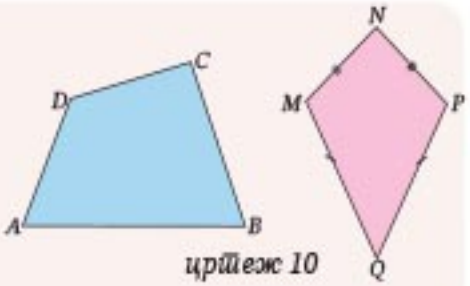
слика 1

Удвостручавањем кракова добијамо једнакокраки трапез са средњом линијом од 11 m.
Према томе,
$11 = \frac{a+5}{2}$, $a = 2 \cdot 11 - 5 = 17$ m.
Обим травњака ће бити $L = 5 + 10 + 10 + 17 = 42$ m.

Делтоид

Активност

На цртежу 10 дата су два трапезоида
ABCD и *MNPQ*.
Они немају ниједан пар паралелних страница.
Који од њих има два пара једнаких суседних страница?

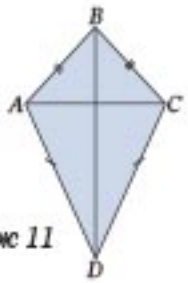


цртеж 10

Сигурно си уочио да трапез *MNPQ* има по две суседне странице једнаке, тј.
$\overline{MN} = \overline{PN}$ и $\overline{MQ} = \overline{PQ}$.

Трапез који има два пара једнаких суседних страница назива се **делтоид**.

За делтоид *ABCD* на *цртежу 11* имамо:
С: *BD* је заједничка страница,
С: $\overline{AB} = \overline{CB}$,
С: $\overline{AD} = \overline{CD}$ =,
ССС: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

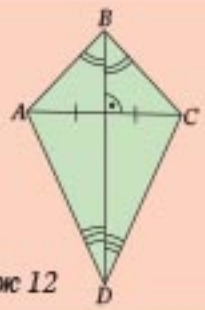


цртеж 11

Дијагонала чије су крајње тачке темена која спајају једнаке странице дели делтоид на два подударна троугла.

Из подударности ова два троугла добијамо својства која следе (*цртеж 12*).

- Углови код темена који спајају неједнаке странице су једнаки.
- Дијагонала чије су крајње тачке темена која спајају једнаке странице је симетрала друге дијагонале.
- Дијагонала чије су крајње тачке темена која спајају неједнаке странице, дели делтоид на два једнакокрака троугла.
- Дијагонале делтоида су међусобно нормалне.



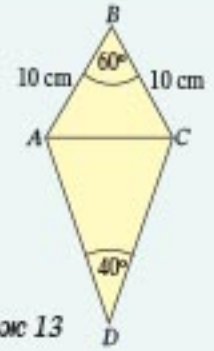
цртеж 12

Пример 5

Краће странице делтоида су дугачке 10 cm. Два његова супротна угла су 60° и 40°. Колика је дужина краће дијагонале? Нацртај цртеж.

Делтоид $ABCD$ који испуњава захтеве задатка дат је на *цртежу 13.* Троугао ACB је једнакостранични троугао као и једнакокраки троугао са углом на врху од 60°.

Према томе, краћа дијагонала је $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$.



цртеж 13

Задатак 7

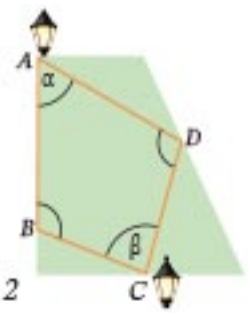
Два несуседна угла у делтоиду су 115° и 46°. Израчунај преостале углове.

Задатак 8

Један од унутрашњих углова делтоида је 51°, а збир једнаких углова је 144°. Израчунај углове делтоида.

Задатак 9

У парку, на травњаку у облику правоугаоног трапеза, постављене су светиљке у тачкама A и C (*слика 2*). Светиљка у тачки A емитује светлост под углом $\alpha = 38°$, а светиљка у тачки C под углом $\beta = 132°$. Колико износе углови под којима се секу краци углова α и β, ако пресек формира делтоид $ABCD$?



Слика 2

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај средњу линију трапеза са основицама $a = 18{,}6$ cm и $b = 13{,}8$ cm.
2. Средња линија трапеза је 7,3 cm, а једна основица је 8,7 cm. Израчунај другу основицу.
3. Средња линија једнакокраког трапеза је дугачка 7 cm, а основице се разликују за 5 cm. Израчунај дужине основица.
4. Обим трапеза са страницама дужине 3 cm и 4 cm износи 20 cm. Израчунај дужину средње линије трапеза.
5. Збир углова који леже на једној од основа правоугаоног трапеза је 235°. Израчунај преостале углове трапеза.

6. Један од углова на доњој основи једнакокраког трапеза је 45°, висина је 8 cm , а мања основица је дугачка 6 cm. Израчунај дужину веће основице трапеза.

7. Израчунај углове једнакокраког трапеза, ако је дато да је угао на мањој основици двоструко већи од угла на већој основи.

8. Израчунај висину једнакокраког трапеза ако је један од његових унутрашњих углова 45°, а основице имају дужине 9 cm и 5 cm.

9. У једнакокраком трапезу $ABCD$, троугао ABC који је формиран од дуже основице, крак и једна од дијагонала трапеза су једнакокраки. Ако је угао $BAC = 40°$, израчунај угао DAC.

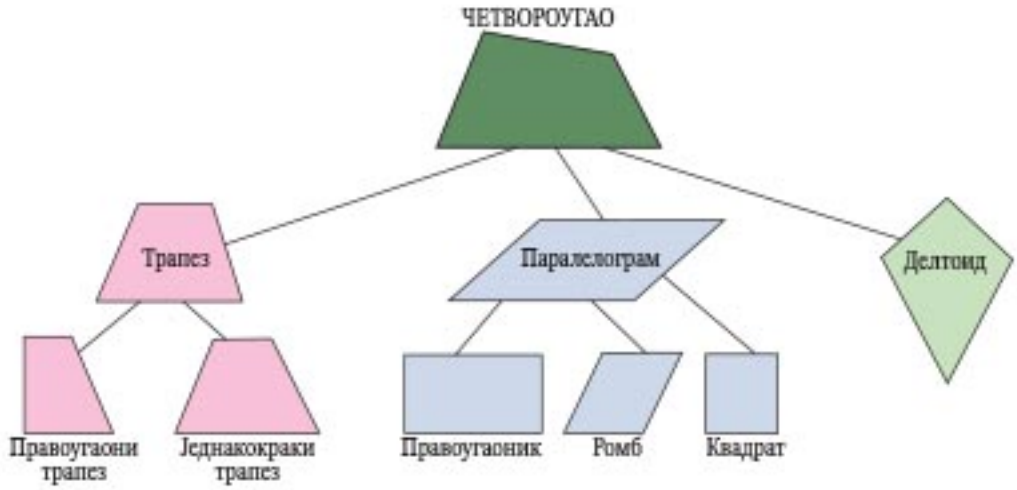
10. Два супротна угла у делтоиду су 51° и 86°. Израчунај остале углове делтоида.

11. Један од унутрашњих углова делтоида је 47°, а збир једнаких углова је 236°. Наћи углове делтоида.

12. **Пројектни задатак**

Нацртај на хамеру дату мапу мисаону мапу. Попуни је тако што ћеш одговоре на питања записивати у одговарајући четвороугао.

ЧЕТВОРОУГАО Шта је четвороугао? Које две странице су суседне, а које су супротне? Која два темена су суседна, а која су супротна? Колики је збир његових унутрашњих углова?	ТРАПЕЗ Шта је трапез? Како се зову непаралелне странице? Шта је средња линија трапеза? Какви су углови који леже на истом краку?	ДЕЛТОИД Које су његове странице? У ком узајамном односу су дијагонале делтоида?
ЈЕДНАКОКРАКИ ТРАПЕЗ Какви су краци међусобно? Какви су углови који леже на истој основи? Какве су дијагонале међусобно?	ПРАВОУГАОНИ ТРАПЕЗ Који трапез се назива правоугаони?	ПАРАЛЕЛОГРАМ Шта је паралелограм? Какве су његове супротне странице међусобно? Који су његови супротни углови? Који су му суседни углови? Какве су дијагонале у односу на њихову тачку пресека.
ПРАВОУГАОНИК Какве су дужине његових дијагонала? Какви су његови углови?	КВАДРАТ Какве су дужине његових дијагонала? Какве су дужине његових страница? Какви су његови углови? Шта представља дијагонала за супротне углове?	РОМБ Какве су дужине његових страница? Под којим углом се секу његове дијагонале? Шта представља дијагонала за супротне углове?



11. ПРИМЕНА ПИТАГОРИНЕ ТЕОРЕМЕ НА ЧЕТВОРОУГЛЕ

Активност

а) Наведи називе четвороуглова на *цртежу 1*.
б) Запиши шта знаш о свакој врсти четвороугла.

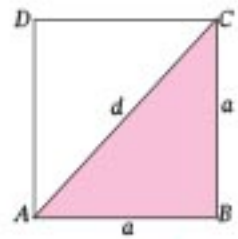


цртеж 1

Питагорина теорема налази примену и у задацима о четвороугловима (квадрати, правоугаоници, трапезоиди, ромбови итд.). Цртањем неких дужи могу се поделити на такве делове, међу којима ће бити правоуглих троуглова. Илустроваћемо ово у следећим задацима. За израчунавања ћемо користити калкулатор и резултат ћемо заокружити на два децимална места.

Примена Питагорие теореме на квадрате, правоугаонике и ромбове

На *цртежу 2* дат је квадрат $ABCD$ са страницом a.
Дијагонала d дели квадрат на два подударна једнакокрака троугла. То је хипотенуза сваког од њих.



цртеж 2

Применом Питагорине теореме на сваки од њих,
добијамо формулу за израчунавање дијагонале d квадрата

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

где је a страница квадрата.

Пример 1

Израчунај дијагоналу d квадрата са страницом $a = 9$ cm.

$d^2 = 2a^2$, $d^2 = 2 \cdot 9^2$ — Замењујемо у формулу за израчунавање дијагонале квадрата.
$d = 12{,}73$ cm — Заокружујемо на две децимале.

Пример 2

Колика је страница квадрата са дијагоналом $d = 8$ cm?

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\quad a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32,\quad a = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

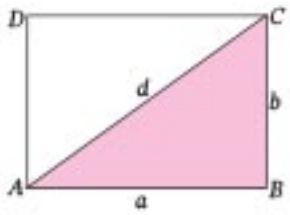
Задатак 1

Израчунај
а) дијагоналу d квадрата, ако је $a = 6$ cm, б) страницу a квадрата, ако је $d = 10$ cm.

На *цртежу 3* дат је правоугаоник $ABCD$ са страницама a и b. Дијагонала d дели правоугаоник на два подударна правоугла троугла. Она је хипотенуза сваког од њих. Применом Питагорине теореме на сваки од њих, добијамо формулу за израчунавање дијагонале d правоугаоника,

$$d^2 = a^2 + b^2$$

где су a и b странице правоугаоника.



цртеж 3

Пример 3

Израчунај дијагоналу d правоугаоника са страницама $a = 20$ cm и $b = 40$ cm.

Замењујемо у формулу за израчунавање дијагонале правоугаоника.

$$d^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 40^2 = 400 + 1600 = 2000,$$
$$d = \sqrt{2000} = 44{,}72 \text{ cm}.$$

Пример 4

Израчунај страницу a правоугаоника, ако је $d = 16$ cm и $b = 7$ cm.

$d^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = d^2 - b^2 = 16^2 - 7^2 = 256 - 49 = 207$, $a = 14{,}39$ cm.

Пример 5

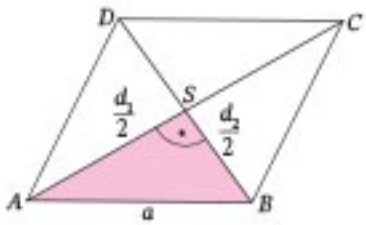
Кошаркаш висок 2,1 m добио је хотелски кревет дужине 2 m и ширине 1 m. Да ли се кошаркаш може испружити на кревету?

Дијагонала хотелског кревета је $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5^2} = 2{,}24\,\text{m}$.
Пошто је 2,1 m < 2,24 m, кошаркаш ће моћи да се испружи на кревету.

На *цртежу 7* дат је ромб $ABCD$ са страницом a и дијагоналама d_1 и d_2.
Подсети се да се дијагонале ромба пресецају, деле на пола и да су нормалне једна на другу.
Сходно томе, оне деле ромб на четири правоугла троугла. Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ASB, добијамо формулу за израчунавање странице a ромба,

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

где су d_1 и d_2 дијагонале ромба.



цртеж 4

Пример 6

Израчунај обим ромба чије су дијагонале 24 cm и 10 cm.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12^2 + 5^2 = 169, \quad a = \sqrt{169} = 13\,\text{cm}.$$

Обим је $L = 4a = 52$ cm.

Задатак 2

Израчунај већу дијагоналу ромба са страницом $a = 5$ cm, ако је мања дијагонал $d_2 = 3$ cm.

Пример 7

Миле треба оградом да подели на пола травњак у облику ромба, дуж мање дијагонале d_1 (*цртеж 5*).

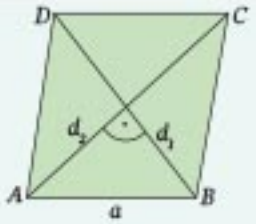
Колико метара ограде треба да купи, знајући да је друга дијагонала $d_2 = 80$ m, а страница $a = 41$ m?

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 41^2 - \left(\frac{80}{2}\right)^2 = 1681 - 1600 = 81$$

$$\frac{d_1}{2} = 9$$

$d_1 = 18$ m.

Миле треба да купи $2 \cdot 41 + 18 = 100$ m ограде.



цртеж 5

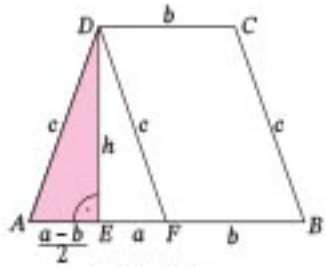
Примена Питагорине теореме на трапез и делтоид

Са дужи DF паралелном са краком BC, једнакокраки трапез је подељен на паралелограм $BCDF$ и једнакокраки троугао AFD, са основицом $a - b$ и висином h (*цртеж 6*).

Висина DE дели једнакокраки троугао AFD на два подударна правоугла троугла. Применом Питагорине теореме на сваки од њих, добијамо формулу за крак c једнакокраког трапеза,

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

где је h висина, а a и b су основице трапеза.



цртеж 6

Пример 8

Израчунај висину једнакокраког трапеза, ако су основе $a = 10$ cm и $b = 4$ cm и дужина крака $c = 5$ cm.

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - \left(\frac{10-4}{2}\right)^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$h = 4$ cm.

Задатак 3

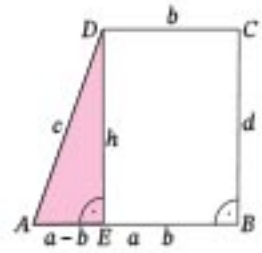
Израчунај обим једнакокраког трапеза са основицама $a = 18$ cm и $b = 8$ cm и висином $h = 12$ cm.

Упутство: Обим једнакокраког трапеза израчунава се помоћу формуле $L = a + b + 2c$, где су a и b основе, а c је крак једнакокраког трапеза.

На *цртежу 7* приказан је правоугаони трапез $ABCD$ са основама a и b и висином h.
Применом Питагорине теореме на правоугли троугао AED, добијамо формулу за израчунавање крака c правоуглог трапеза,

$$c^2 = h^2 + (a-b)^2$$

где је h висина, а a и b су основе трапеза.



цртеж 7

Пример 9

Израчунај висину правоуглог трапеза са основама $a = 10$ cm и $b = 6$ cm, и краком $c = 12$ cm.

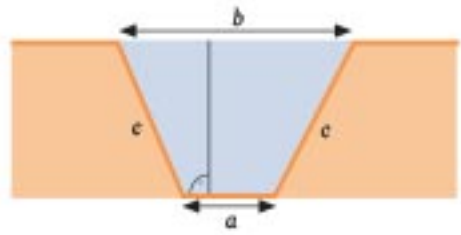
$$c^2 = h^2 + (a-b)^2,\ h^2 = c^2 - (a-b)^2 = 12^2 - (10-6)^2 = 128$$
$$h = \sqrt{128} = 11{,}31\,\text{cm}.$$

Задатак 4

Израчунај обим правоугаоног трапеза са основама $a = 12$ cm и $b = 9$ cm, и висином $h = 4$ cm.
Упутство: Обим правоугаоног трапеза се израчунава помоћу формуле $L = a + b + c + d$, где су a и b основе, а c и d странице правоугаоног трапеза.

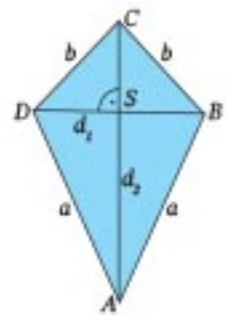
Задатак 5

Канал има дубину од 2,4 m и ширину а ширину $b = 3{,}2$ m (*цртеж 8*). Колико метара је ширина a на дну канала, ако су бочни зидови дужине $c = 25$ dm?



цртеж 8

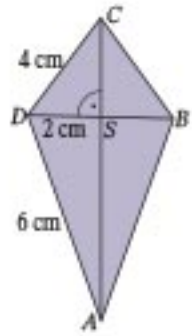
На *цртежу 9* приказан је делтоид $ABCD$ са страницама a и b, и дијагоналама d_1 и d_2.
Подсети се да су дијагонале делтоида међусобно нормалне. Оне деле делтоид на четири правоугла троугла.



цртеж 9

Пример 10

Израчунај дијагонале делтоида $ABCD$ према подацима на цртежу 10.



цртеж 10

Према подацима на цртежу:

$d_1 = \overline{BD} = 2 \cdot 2 = 4\text{cm}$

$\overline{CS}^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

$\overline{CS} = \sqrt{12} = 3{,}46\text{cm}$

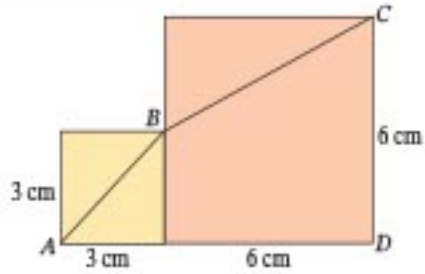
$\overline{AS}^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

$\overline{AS} = \sqrt{32} = 5{,}66\text{cm}$

$d_2 = \overline{AS} + \overline{CS} = 5{,}66 + 3{,}46 = 9{,}12\text{ cm}.$

Задатак 6

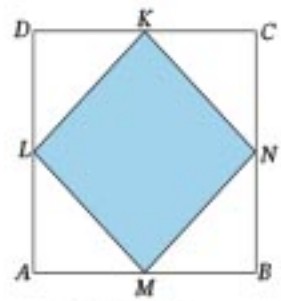
Два квадрата са страницама 3 cm и 6 cm постављена су један поред другог као на *цртежу 11*. Израчунај обим четвороугла $ABCD$.



цртеж 11

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај дужину дијагонале правоугаоника чије су странице
   а) $a = 2{,}4$ cm и $b = 3{,}2$ cm, б) $a = 14$ cm и $b = 48$ cm.
2. Израчунај дужину дијагонале квадрата чија је страница $a = 7{,}5$ cm.
3. Израчунај обим ромба са дијагоналама: а) 48 cm и 64 cm, б) 66 cm и 88 cm.
4. Нађи дијагоналу d_2 ромба ако су страница и друга дијагонала:
   а) $a = 26$ cm и $d_1 = 48$ cm, б) $a = 30$ cm и $d_1 = 36$ cm.
5. Квадрат $ABCD$ има страницу од 8 cm. У њега је уписан други квадрат MNKL, чија темена леже у срединама страница датог квадрата. Израчунај обим квадрата $MNKL$ (*цртеж 12*).
6. Иван је купио округли сто пречника 230 cm. Да ли ће моћи да га унесе у кућу кроз улазна врата која су висока 2 m и широка 90 cm?



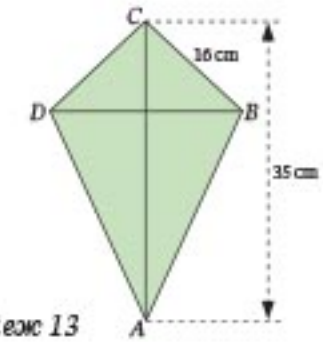
цртеж 11

7. Висина ромба је 3 cm, а оштар угао је 45°. Израчунај обим ромба.
8. Основе једнакокраког трапеза су $a = 42$ cm и $b = 24$ cm, а његов крак је дугачак 41 cm. Израчунај висину трапеза.
9. Две основе правоугаоног трапеза су дугачке 5 cm и 10 cm, а његов дужи крак има дужину 13 cm. Израчунај висину трапеза.

10. Израчунај обим једнакокраког трапеза са основицама $a = 23$ cm и $b = 11$ cm и висином $h = 8$ cm.

11. Мања дијагонала дели делтоид на једнакострани троугао са страницом 10 cm и са висином 12 cm. Израчунај стране делтоида.

12. Емран прави авион у облику делтоида као на цртежу 13. Он жели да залепи црвену траку дуж ивица. Колико центиметара траке ће му бити потребно?



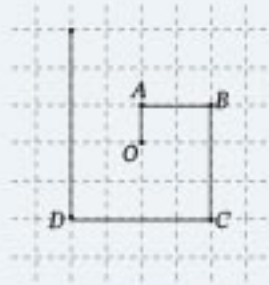
цртеж 13

Истраживање

Због квара на свом авиону, пилот Лука је био приморан да слети у пустињу. Знао је да се у близини налази село, али није знао у ком правцу се село налази и колико је далеко. Пошто је видљивост била до $\sqrt{2} \approx 1{,}41\text{km}$, могао је да види село на удаљености од највише 1,41 km. Користећи компас, Лука је кренуо пешке да тражи село на следећи начин. Из авиона означеног са O, прешао је 1 km северно (до тачке A), 2 km источно (до тачке B), 3 km јужно (до тачке C), 4 km западно (до тачке D), 5 km северно (до тачке F), 6 km источно, итд. (*цртеж 14*).

а) Зашто ће Лука на овај начин са сигурношћу пронаћи село?

б) Ако је видљивост била до 1 km, а Лука је ишао по истој шеми, да ли је сигурно да ће пронаћи село?



цртеж 14

12. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

Активност

1. Конструиши троугао, ако је дато:

а) странице $b = 5$ cm и $c = 3$ cm и угао између њих $\alpha = 55°$,

б) страница $a = 5$ cm и углови $\beta = 55°$ и $\gamma = 60°$ који леже на њој,

в) странице $a = 6$ cm, $b = 5$ cm и $c = 4$ cm.

2. а) Колико независних елемената је потребно за конструисање троугла? Да ли постоји барем један уздужни елемент међу елементима? Колико је независних елемената, укључујући барем један уздужни елемент, потребно за конструисање једнакокраког троугла или правоуглог троугла, а колико за конструисање једнакостраничног троугла?

б) Паралелограм је подељен на два подударна троугла цртањем једне од његових дијагонала. Колико независних елемената, укључујући барем један по дужини, би било потребно да се конструише паралелограм? Колико независних елемената, укључујући барем један дужински, би било потребно да се конструише ромб, правоугаоник или квадрат?

Конструкције паралелограма

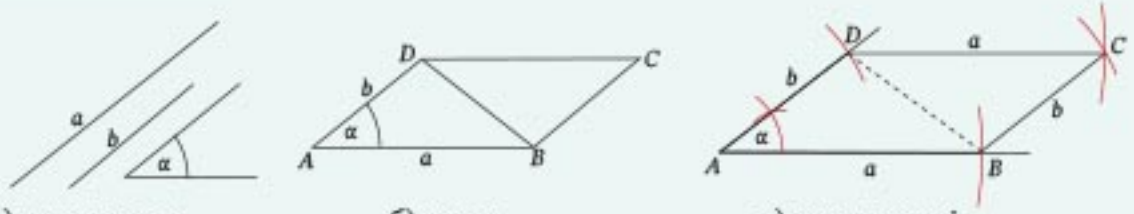
Ако тачно одговориш на питања, сигурно ћеш видети да су за **конструкцију паралелограма** потребна највише три независна елемента, међу којима је бар један дата дужина.

Користећи основне конструкције троугла и својства паралелограма која произилазе из знакова подударности троуглова САС, АСА и ССС, веома лако и једноставно ћемо извршити следеће конструкције паралелограма.

Пример 1

Конструиши паралелограм $ABCD$, ако су дате две суседне странице a и b и угао α између њих.

Конструкција се врши тако што се прво конструише троугао ABD са датим страницама a и b и углом α између њих. Затим, изнад дијагонале BD, конструишите троугао BDC са три дате странице. Тако добијамо паралелограм $ABCD$ (цртеж 1). Постоји само један такав паралелограм.



а) дати подаци б) скица в) конструкција

цртеж 1

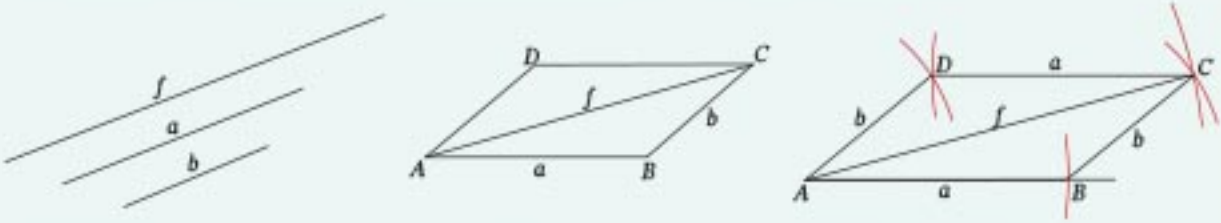
Задатак 1

Конструиши паралелограм $ABCD$, ако су дате две суседне странице $a = 5$ cm и $b = 3$ cm и угао између њих $\alpha = 60°$.

Пример 2

Конструиши паралелограм $ABCD$, ако су дате две суседне странице a и b и једна од његових дијагонала f.

Конструкција се врши тако што се прво конструише троугао ABC. Затим се, изнад дијагонале AC, конструише троугао ACD са три дате странице. Тако, добијамо паралелограм $ABCD$ (цртеж 2). Постоји само један такав паралелограм.



а) дати подаци б) скица в) конструкција

цртеж 2

Задатак 2

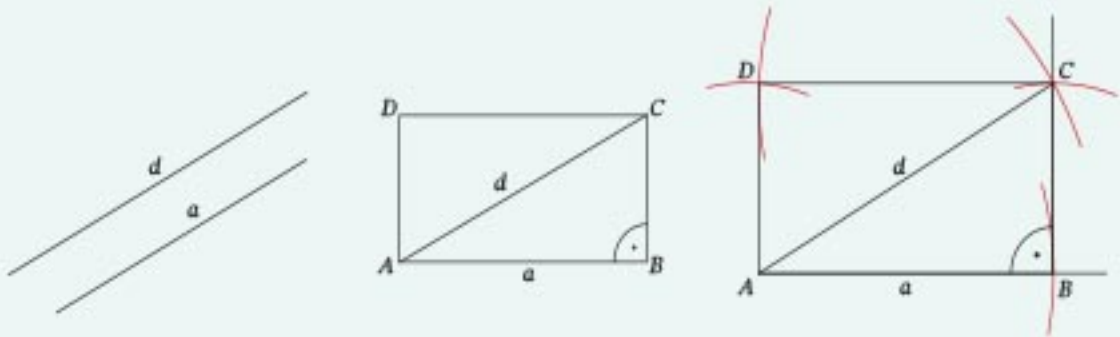
Конструиши паралелограм са датим страницама $a = 4$ cm и $b = 3$ cm и дијагоналом $f = 6$ cm.

За конструкцију правоугаоника или ромба, потребна и довољна су два елемента, међу којима је бар један дата дужина, а за конструкцију квадрата потребан је само један елемент, дата дужина.

Пример 3

Конструиши правоугаоник $ABCD$, ако су дате једна страница a и дијагонала d.

Конструкција се врши тако што прво конструишемо правоугли троугао ABC са катетом a и хипотенузом d. Затим, изнад дијагонале AC, конструишемо троугао ACD са три дате странице. Тако добијамо правоугаоник $ABCD$ (цртеж 3). Постоји само један такав правоугаоник.



а) дати подаци б) скица в) конструкција

цртеж 3

Задатак 3

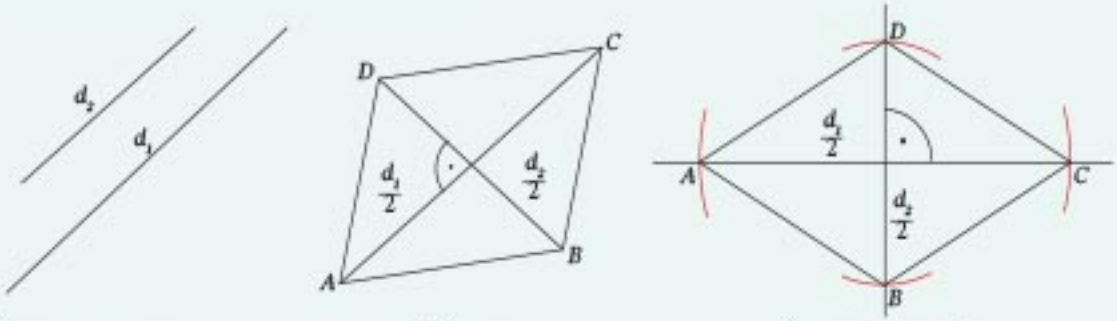
Конструиши правоугаоник $ABCD$, ако је дато:
а) страница $b = 3$ cm и дијагонала $d = 5$ cm,
б) дијагонала $d = 5$ cm и угао између дијагонала $\alpha = 40°$.

Упутство: Нацртај скицу траженог правоугаоника. Затим нацртај угао α и продужи његове странице до правих. Искористи својство да су дијагонале правоугаоника једнаке и да се пресецају.

Пример 4

Конструиши ромб $ABCD$, ако су дате две дијагонале d_1 и d_2.

Прво конструишемо две међусобно нормалне праве. Из тачке пресека преносимо дуж једне праве половину једне дијагонале, а дуж друге праве половину друге дијагонале. Тако се добијају тачке A, B, C и D на *цртежу* 4. Њиховим спајањем добијамо ромб $ABCD$. Постоји само један такав ромб.



а) дати подаци б) скица в) конструкција

цртеж 4

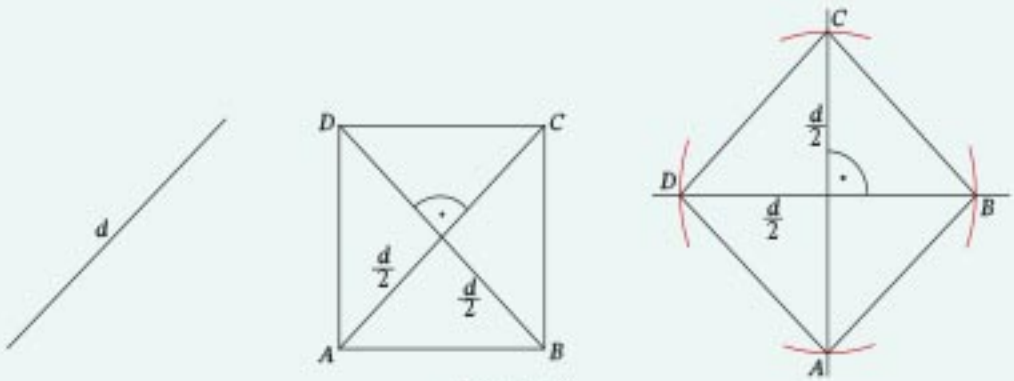
Задатак 4

Конструиши ромб $ABCD$, ако је дато:
а) страница $a = 3$ cm и једна дијагонала $d_2 = 5$ cm,
б) обе дијагонале $d_1 = 10$ cm и $d_2 = 64$ mm.

Пример 5

Конструиши квадрат $ABCD$ са датом дијагоналом d.

Прво конструишемо две међусобно нормалне праве. Из тачке пресека преносимо једну половину дијагонале дуж обе праве. Тако добијамо тачке A, B, C и D на *цртежу* 5. Њиховим спајањем добијамо квадрат $ABCD$. Постоји само један такав квадрат.



цртеж 5

Задатак 5

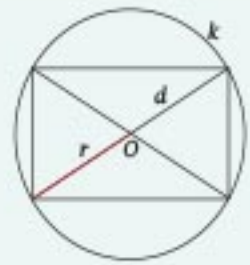
Конструиши квадрат са страницом $a = 3{,}5$ cm.

Конструкције описане и уписане кружнице

Пример 6

Опиши круг k око датог правоугаоника са дијагоналом d.

а) Слика 6 приказује правоугаоник са дијагоналом d. Према својствима правоугаоника, пресек његових дијагонала O је једнако удаљен од свих његових темена. Зато, конструишемо круг k са центром у O и полупречником r једнаким половини о дијагонале, односно $r = \frac{d}{2}$. Кружница $k\,(O, r)$ пролази кроз свако теме правоугаоника, тј. то је описана кружница око правоугаоника.
Постоји само један таква кружница.



цртеж 6

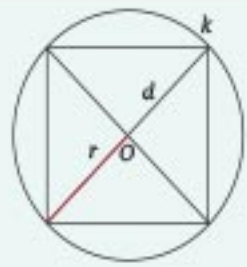
Задатак 6

Опиши круг k око датог правоугаоника са страницама $a = 5$ cm и $b = 3$ cm.
Упутство: Конструиши правоугаоник и нацртај његове дијагонале.

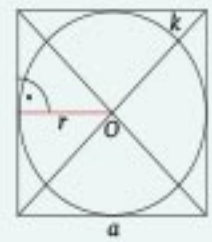
Пример 7

а) Опиши круг k око квадрата са дијагоналом d.
б) Упиши круг k у квадрат са страницом a.

а) На *цртежу* 7а дат је квадрат са дијагоналом d.
Према својствима квадрата, пресек његових дијагонала O је једнако удаљен од свих његових темена. Зато, конструишемо круг k са центром O и полупречником r једнаким половини дијагонале, тј. $r = \frac{d}{2}$.
Круг $k\,(O, r)$ пролази кроз свако теме квадрата, тј. око квадрата је описана кружница.
Постоји само једна таква кружница.



цртеж 7а



цртеж 7б

б) На цртежу 7б приказан је квадрат са страницом a. Пресек његових дијагонала O је једнако удаљен од његових страница. Стога је полупречник r уписаног круга k једнак половини његове странице, тј. $r = \frac{a}{2}$. Круг $k\,(O, r)$ додирује све његове странице, односно то је уписана кружница у квадрату. Постоји само један таква кружница.

Задатак 7

а) Опиши кружницу k око квадрата са страницом $a = 4$ cm.
б) Упиши круг k у квадрат са страницом $a = 5$ cm.

Задатак 8

Архитекте пројектују нови део градског парка. Састоји се од два дела која су описали само речима. Први део је цветна леја у облику правоугаоника са светлећом кружницом која пролази кроз свако теме правоугаоника. Други део има облик квадрата и садржи фонтану која додирује сваку страну квадрата и светлећу кружницу који пролази кроз свако теме квадрата. Конструиши делове које су архитекте описале.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Конструиши паралелограм $ABCD$ са датим:
   а) страницама $a = 3$ cm, $b = 6$ cm и дијагоналом $f = 4$ cm,
   б) дијагоналама $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm и угао између њих $\alpha = 75°$.
2. Конструиши ромб $ABCD$, ако су дате:
   а) дијагонале $d_1 = 7$ cm, $d_2 = 5$ cm,
   б) страница $a = 5$ cm и оштар угао $45°$,
   в) страница $a = 4$ cm и висина $h = 3$ cm,
   г) дијагонала $d_1 = 7$ cm и висина $h = 4$ cm.
3. Конструиши правоугаоник $ABCD$ са датим:
   а) страницама $a = 4{,}5$ cm и $b = 3$ cm, б) страница $b = 3{,}5$ cm и дијагонала $d = 5{,}5$ cm.
4. Општина је одлучила да изгради мали ботанички парк који се састоји од четири суседне парцеле различитих облика: паралелограм, ромб, правоугаоник и квадрат. Архитекта је оставио само следеће описне белешке.
   - Парцела А има два пара паралелних страница дужине 8 m и 6 m. Суседне странице нису једнаке. У овом делу је планирана садња ароматичних биљки.
   - Парцела Б има четири једнаке странице од по 7 m, а једна дијагонала је дужа од друге.
     У овом делу је планирана садња ружа у кружном распореду. - Парцела В има углове од 90°, а суседне странице су дугачке 5 mи 9 m. Овај део ће се користити за постављање клупа.
   - Парцела Г има четири странице од 6 m и сви углови су прави. Ово ће бити дечји кутак са песком.

   Препознај их, а затим користећи размеру конструиши облике које је описао архитекта.
5. Опиши кружницу k око правоугаоника са страницом $a = 3$ cm и дијагоналом $d = 5$ cm.
6. Упиши круг k у квадрат са датом страницом $a = 4$ cm.
7. Опиши круг k око квадрата са датом дијагоналом $d = 6$ cm.

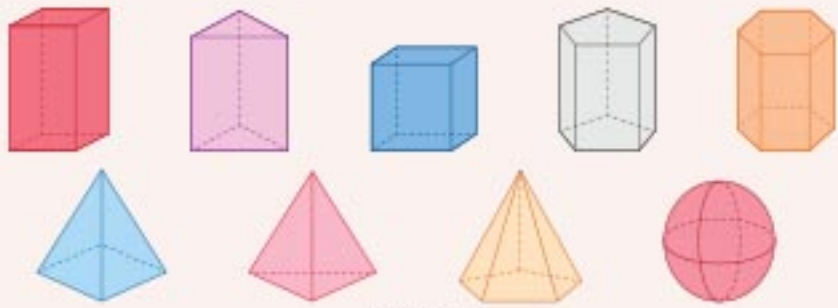
Истраживање

1. Андреј је нацртао кружницу, али није означио центар, а није знао ни полупречник кружнице. Помозите Анрeју да пронађе центар и полупречник круга. Ако имате прилику, користите образовни софтвер да помогнете Андрeју.
2. Ариф покушава да упише кружницу у правоугаоник који није квадрат. Објасни зашто је Ариф у заблуди.

13. ПОЛИЕДАР, ЛОПТА И СФЕРА

Активност

Наведи називе 3Д-облика на цртежу 1. Који од њих су ивични, а који цилиндрични 3-Д облици? Опиши којим 2-Д облицима је сваки од њих ограничен.



цртеж 1

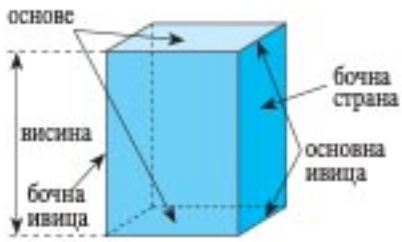
Тродимензионални облици (3Д) су део простора и проучава их део геометрије који се назива **стереометрија**, за разлику од раванских 2Д облика које изучава **планиметрија**. Један од најчешће коришћених 3Д облика је полиедар.

Полиедар је део простора ограничен полигонима (троугловима, четвороугловима, петоугловима итд.).

Приликом скицирања полиедара, видљиве ивице се цртају пуном линијом, док се невидљиве ивице цртају испрекиданом линијом.
До сада смо се упознали са две врсте полиедара: **призмама** и пирамидама.

Призме имају две подударне паралелне основе које су полигони-многоуглови. (*цртеж* 2). Дужи које повезују одговарајућа темена основица су међусобно паралелне и називају се **бочне ивице.** Ивице које су део основица, односно странице основица, називају се **основне ивице.**

Парови основних ивица, заједно са одговарајућим бочним ивицама, формирају паралелограме, који се називају **бочне стране** призме.
За призму кажемо да је **права призма** ако су јој паралелне ивице нормалне на обе основе. Разматраћемо само правоугаоне призме. У зависности од тога какав многоугаоник представљају основице, призма може бити троугаона, четвороугаона итд.

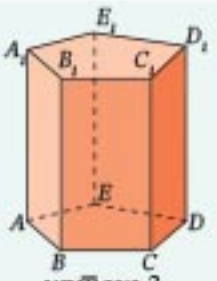


цртеж 2

Пример 1

За петоугаону призму на *цртежу* 3, запиши све њене:
а) темена, б) бочне ивице, в) основне ивице , г) бочне стране, д) основе.

а) Темена су тачке: $A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1$ и E_1.
б) Бочне ивице су дужи: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и EE_1
в) Основне ивице су дужи:
$AB, BC, CD, ED, EA, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$ и E_1A_1,
г) Бочни зидови су правоугаоници:
$ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1$ и EAA_1E_1,
е) Основе су петоуглови: $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$.



цртеж 3

Ако су основе праве призме правилни полигони-многоуглови, та призма се назива **правилна призма.**
Растојање између основа призме назива се **висина** призме и најчешће се означава са H.

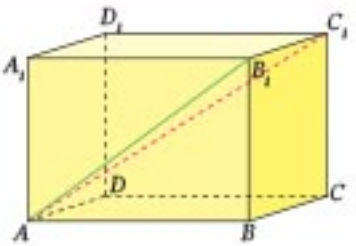
Задатак 1

Колико бочних ивица има: а) осмоугаона призма, б) дванаестоугаона призма?

Дијагонала у полиедру се назива **просторном** ако спаја два темена полиедра и не припада ниједној страни полиедра.

Пример 1

Квадрати су призме које су ограничене са три пара паралелних правоугаоника. На цртежу 4 дат је квадрат $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чије ивице имају дужине a, b и c. Просторна дијагонала је дуж AC_1. Дуж AB_1 није просторна дијагонала, јер је део стране ABB_1A_1.



цртеж 4

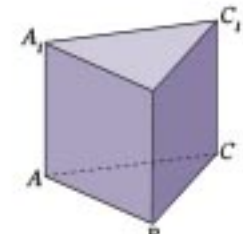
Задатак 2

Наведи све дијагонале квадрата на *цртежу* 4. Које од њих су просторне, а које нису?

Пример 3

На *цртежу* 5 дата је троугласта призма $ABCA_1B_1C_1$.
Објасни зашто ова призма нема просторну дијагоналу.

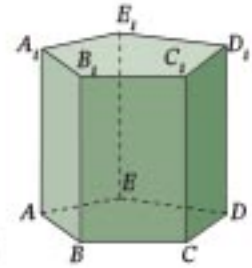
У датој призми, свака дуж чије су крајње тачке
два темена призме лежи на страни призме или
представља ивицу.



цртеж 5

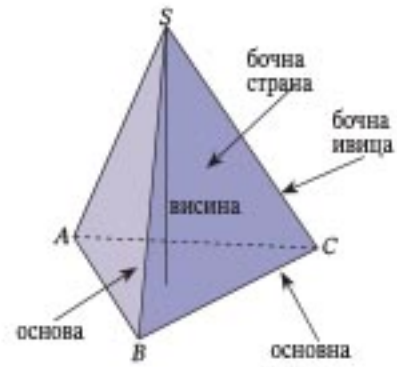
Задатак 3

Напиши све просторне дијагонале призме на *цртежу* 6.



цртеж 6

Пирамида има многоугао као основу и има једно
теме названо **врх** и које не лежи у основи (*цртеж* 7).
Дужи које спајају врх и темена основе називају се
бочне ивице.
Ивице које су странице основе називају се
основне ивице.
Свака основна ивица, заједно са одговарајуће
две бочне ивице, формирају троуглове,
који се називају **бочне стране** пирамиде.
Пирамиде могу бити троугласте, четвороугаоне,
итд. у зависности од тога какав многоугао
представља њихову основу.



цртеж 7

Пример 4

За троугласту пирамиду на *цртежу* 7:
а) запиши све њене: темена, бочне ивице, основне ивице, бочне стране,
б) запиши врх и основу.

а) Темена су тачке A, B, C и S; бочне ивице су дужи AS, BS и CS; Основне ивице су дужи AB, BC и CA; бочне стране су троуглови ABS, BCS и CAS.
б) Врх је теме S, а основа је троугао ABC.

Ако је основа пирамиде правилан многоугао и све њене бочне ивице имају исту дужину, пирамида се назива **правилна пирамида**.
Растојање од врха пирамиде до основе назива се **висина** пирамиде и најчешће се означава са H.
Троугласта пирамида се назива тетраедар, јер има 4 темена. Међутим, тетраедар се често користи да означи правилну троугласту пирамиду чије су стране једнакостранични троуглови.

Задатак 4

Колико основних ивица има: а) петоугаона пирамида, б) двадесетоугаона пирамида.

Пример 3

Да ли постоји просторна дијагонала у пирамиди?

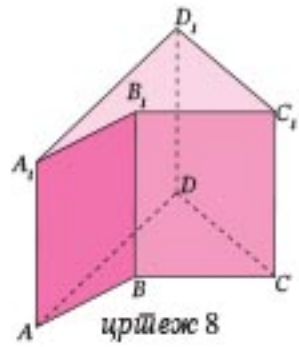
Дуж која спаја врх пирамиде са неким од темена основе представља ивицу пирамиде и не може бити дијагонала. Дуж која спаја два темена основе, по дефиницији, није просторна дијагонала. Зато, пирамиде немају просторне дијагонале.

Пример 4

Знамо да троугласта призма нема просторне дијагонале. Такође знамо да пирамиде немају просторне дијагонале. Али ако поставимо правилну пирамиду $A_1B_1C_1S$ на правилну тространу призму $ABCA_1B_1C_1$, добијамо полиедар који није ни призма ни пирамида. Има три просторне дијагонале AS, BS и CS.

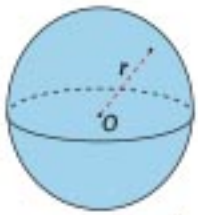
Кажемо да је полиедар **конвексан** ако дуж која повезује било које две тачке полиедра припада полиедру.

Конвексни полиедри су, на пример, троугаоне призме и троугаоне пирамиде.
На *цртежу* 8 приказан је полиедар који није конвексан.
На пример, дуж AC није део полиедра.

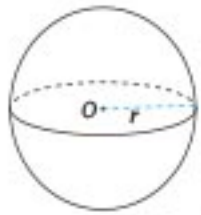


цртеж 8

Лопта је скуп свих тачака у простору које су на удаљености једнакој или мањој од r од дате тачке O. **Сфера** је скуп тачака у простору које су на удаљености r од дате тачке O. На *цртежу* 9 дата је лопта са полупречником r, а на *цртежу* 10 дата је сфера са полупречником r.



цртеж 9



цртеж 10

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Шта је полиедар, а шта конвексни полиедар? Нацртај конвексни полиедар.
2. Нацртај полиедар који није ни призма ни пирамида.
3. Нацртај шестоугаону призму и означи је. Запиши сва њена:
   а) темена, б) бочне ивице, ц) ивице основе, д) бочне стране, е) основе.
4. Нацртај троугаону призму и на њене две основе нацртај две правилне троугаоне пирамиде. Затим нацртај у боји све просторне дијагонале добијеног полиедра.
5. Нацртај седмоугаону пирамиду и означи је.
   а) запиши сва њена: темена, бочне ивице, ивице основе, бочне стране,
   б) запиши врх и основу.
6. Колико ивица основе има: а) десетоугаона призма, б) двадестоугаона пирамида?
7. Колико темена има: а) стоугаона пирамида, б) стоугаона призма?
8. Колико бочних ивица има:
   а) деветоугаона призма, б) десетоугаона пирамида?
9. Од којих 3Д облика је састављена кућа на *цртежу* 11?



цртеж 11

10. Шта је лопта, а шта сфера? Наведи примере лопти и сфера из твог окружења.

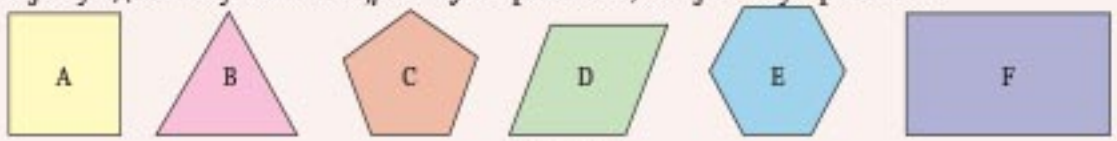
Истраживање

Каква пирамида је Кеопсова пирамида у Египту? Да ли је троугаона, четвороугаона, итд.? Да ли је правилна пирамида?
Потражите на интернету информације о димензијама (ивицама) Кеопсове пирамиде. Направи модел од картона Кеопсове пирамиде у размери 1:1000.

14. ПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ

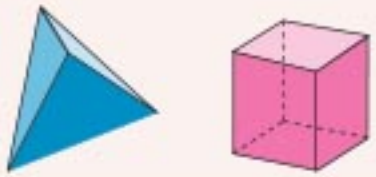
Активност

1. Како се назива многоугао са једнаким страницама и једнаким угловима?
2. Који су од многоуглова на *цртежу* 1 правилни, а који нису правилни?



цртеж 1

3. Какви многоуглови су стране коцке, а какве су стране тетраедра на *цртежу* 2?



цртеж 2

Ако си пажљиво погледао/ла, видео/ла си да су стране тетраедра и коцке правилни многоуглови. Тачније, стране тетраедра су једнакостранични троуглови, а стране коцке су квадрати.

Кажемо да је полиедар **правилан** ако су његове стране правилне и подударни многоуглови.

Постоји само пет врста правилних полиедара и били су познати старим математичарима. Правилни полиедри се називају и **Платонова тела**, по старом филозофу Платону.
У следећој табели дате су све врсте правилних полиедара. Наведен је број темена, ивица и страна, као и врста правилних многоугаоника који их покривају.

	име	темена	ивица	страна	врста правилног многоугаоника	број ивица по темену
	тетраедар	4	6	4	једнакостранични троугао	3
	коцка	8	12	6	квадрат	3
	октаедар	6	12	8	једнакостранични троугао	4
	додекаедар	20	30	12	Правилни петоугао	3
	икосоедар	12	30	20	једнакостранични троугао	5

Појава правилних полиедара у природи је занимљива. На пример, аденовирус има љуску у облику икосаедра, изомери бора формирају тетраедарске, октаедарске или икосаедарске облике, а молекули често имају тетраедарску или октаедарску геометрију.
Дијаманти често кристалишу у облику октаедара, а минерал пирит кристалише у облику коцке, октаедра или додекаедра (слика 1).



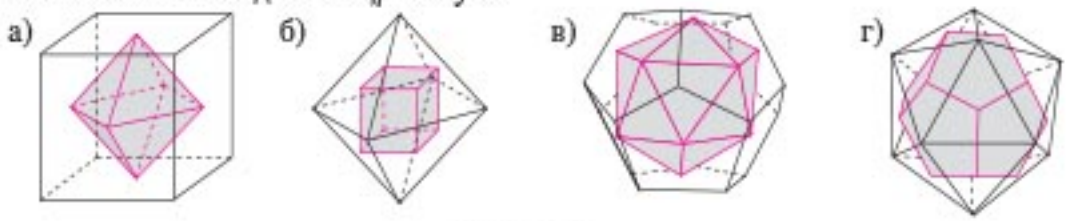
Аденовирус Дијамант Изомер бора Молекул Пирит

слика 1

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

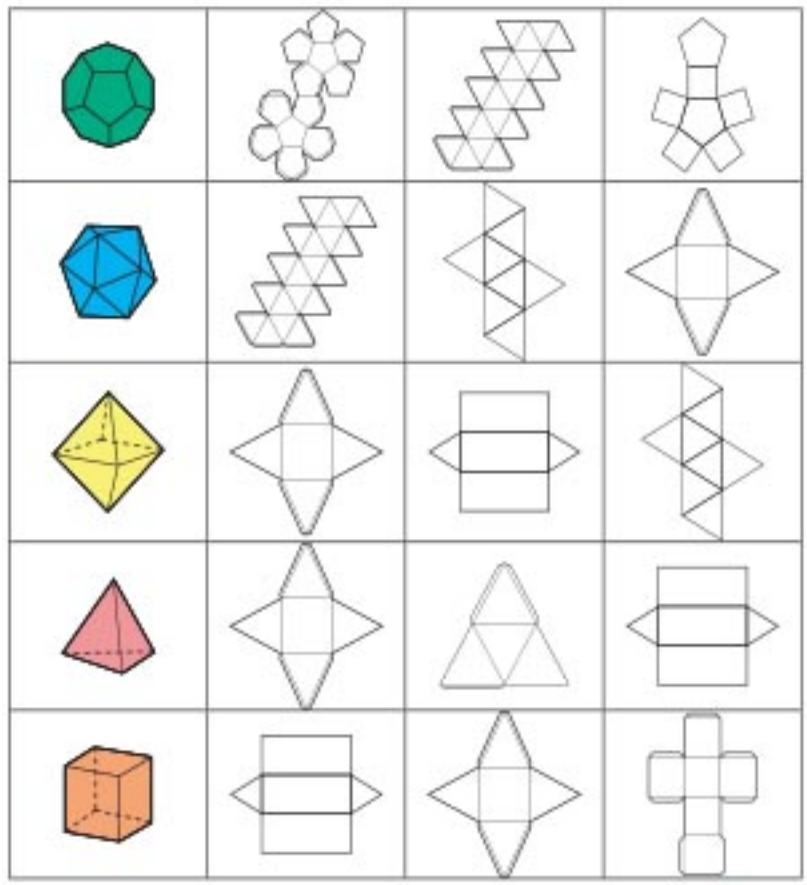
1. а) Наведи свих пет врста правилних полиедара.
   б) Којим правилним полигонима је покривен сваки од њих?
   в) По колико ивица излази из сваког темена сваког од њих?

2. Која Платонова тела видиш на *цртежу 3*:



цртеж 3

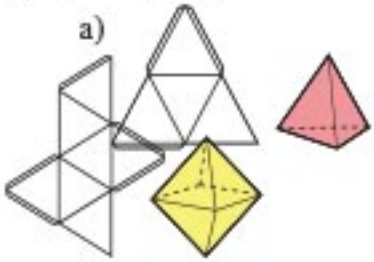
3. Која од три мреже одговара сваком датом телу?



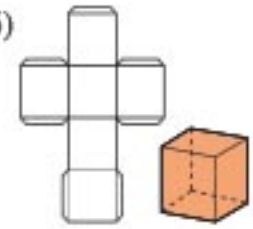
4. Пројектна активност

1) Према датој мрежи и димензијама, направите модел тела, ако је
а) страница троугла 7 cm, б) страница квадрата 5 cm,
в) страница троугла 4 cm, г) страница петоугла је 3 cm,
д) страница троугла 2 cm.

а)

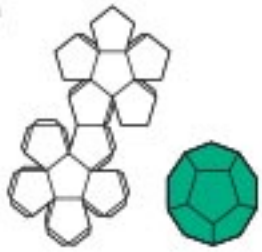


б)

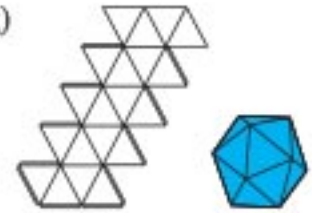


в)

г)



д)



2) Нацртај табелу на хамеру, запиши податке за сваку слику и залепи модел у последњи ред.

					
име					
стране					
ивице					
темена					
модел					

Истраживање

Откриће Платонових тела почело је дефиницијом три тела од стране групе старогрчких математичара званих Питагорејци, а старогрчки математичар Платон дефинисао је последња два. Платон је описао пет тела као симболе пет основних елемената света: ватре, ваздуха, воде, земље и етра (универзума).
Истражи на интернету:
а) Који елемент и којем телу је Платон доделио?
б) Како је притом објаснио симболику?

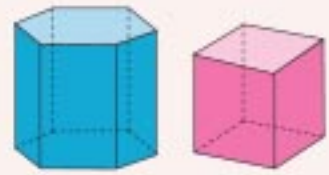
в) Како је Јоханес Кеплер применио Платонова тела у свом истраживању?



15. ОДНОС ИЗМЕЂУ БРОЈА ТЕМЕНА, ИВИЦА И ЗИДОВА ПОЛИЕДРА

Активност

На цртежу 1 дата су два конвексна полиедра. За сваки од њих, преброј њихова темена, одузми број ивица и додај број страна. Шта примећујеш? Да ли постоји веза између броја темена, ивица и страна датог полиедра?



цртеж 1

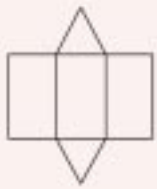
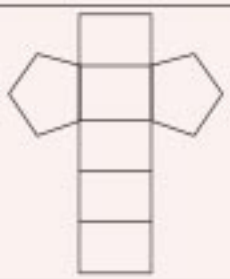
За сваки конвексни полиедар, важи **Ојлерова формула**:

$$V - E + F = 2$$

где је V број темена, E је број ивица, а F је број страна датих полиедара.

Активност

Прецртај мреже полиедара датих у табели на картону, исеци их и састави полиедре.
а) Одреди број темена, ивица и страна сваког полиедра.
б) Провери Ојлерову формулу сваког полиедра.

троугласта призма	четвороугаона пирамида	петоугаона призма	шестоугаона пирамида
			

Пример 1

Провери Ојлерову формулу за:
а) троугаона пирамида, б) четвороугаона призма, в) петоугаону пирамиду

а) троугаону пирамиду
$V = 4, E = 6$ и $F = 4$
$V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$

б) четвороугаону призму
$V = 8, E = 12$ и $F = 6$
$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$

в) петоугаону пирамиду
$V = 6, E = 10$ и $F = 6$
$V - E + F = 6 - 10 + 6 = 2$

Задатак 1

Провери Ојлерову формулу за свако Платоново тело:
а) тетраедар, б) коцка, в) октаедар, г) додекаедар, д) икосаедар.

Пример 2

Користећи Ојлерову формулу, провери да ли постоји конвексни полиедар са 6 темена, 12 ивица и 5 страна.

$V = 6, E = 12$ и $F = 5$
$V - E + F = 6 - 12 + 5 \neq 2$ Не постоји конвексни полиедар са датим условима.

Задатак 2

Да ли постоји конвексни полиедар са 20 темена, 40 ивица и 20 страна?

Ојлерова формула се користи за израчунавање непознатог броја темена, ивица или страна.

Пример 3

Колико страна има конвексни полиедар са 15 темена и 28 ивица?

Према услову у задатку $V = 15$ и $E = 28$. Заменом познатих вредности у Ојлеровој формули, добијамо
$V - E + F = 2, 15 - 28 + F = 2, F = 15.$
Дати конвексни полиедар има 15 ивица.

Задатак 3

Колико темена има конвексни полиедар са 40 ивица и 21 страном?

Задатак 4

Ученици праве дрон са телом у облику полиедра са 22 стране и 36 ивица.
Колико темена има тело дрона?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Користећи Ојлерову формулу, провери да ли постоји конвексни полиедар са 7 темена, 18 ивица и 12 страна.
2. Конвексни полиедар има 16 темена и 10 страна. Колико ивица има тај полиедар?
3. Колико темена има полиедар са 36 ивица и 14 страна?
4. Нацртај полиедар састављен од коцке и правилне четвороугаоне пирамиде које имају заједничку страницу. Затим за полиедар провери једначину $V - E + F = 2$.
5. Нацртај полиедар састављен од две четвороугаоне пирамиде које имају заједничку основу. Затим за полиедар провери једначину $V - E + F = 2$.

Истраживање

1. Да ли полиедри приказани на цртежу 2 нису конвексни? Колико „рупа“ сваки од њих има?
   а) За сваки полиедар, изброј његова темена, ивице и стране.
   б) Израчунај вредност израза $V - E + F$ за сваки полиедар.
   в) Да ли је формула $V - E + F = 2 - 2 \cdot d$ важи, где је d број „рупа“ у полиедру?
   г) Да ли се вредност израза $V - E + F$ смањује за 2 са сваком новом рупом?



цртеж 2

16. ЦРТАЊЕ СЛОЖЕНИХ 3Д-ОБЛИКА

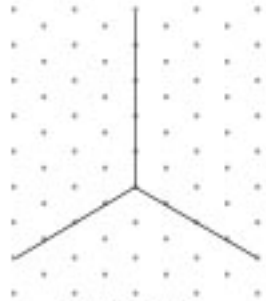
За цртање сложених 3Д-облика на равни можемо користити **изометријски папир** . На њему је нацртана мрежа формирана паралелним редовима тачака, тако да су сваке две суседне тачке у реду једнако удаљене, а са најближом тачком у суседном реду формирају једнакостранични троугао. Важно је правилно поставити папир, тако да поменути редови тачака буду постављени вертикално (*цртеж* 1а), а не хоризонтално (*цртеж* 1б). Ово нам омогућава да поставимо координатни систем са три осе, под углом од 120°, као на цртежу 1в. Приликом цртања на изометријском папиру, односи између димензија нацртаног 3Д-облика су исти као и односи између димензија датог 3Д-облика.



цртеж 1а



цртеж 1б

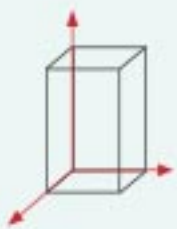


цртеж 1в

Пример 1

На изометријском папиру нацртај квадар димензија 3, 4 и 5 јединица.

На *цртежу* 2а дата је скица квадра. На изометријском папиру цртамо координатни систем са осама под углом од 120°. На координатним осама наносимо дужине ивица: 3, 4 и 5 јединица, одговарајуће (*цртеж* 2б).



цртеж 2а



цртеж 2б

Према скици, цртамо три видљиве вертикалне ивице (*цртеж* 2в). Затим цртамо све преостале видљиве ивице које су паралелне са друге две осе (*цртеж* 2г). На крају, цртамо невидљиве ивице испрекиданим или тањим линијама (цртеж 2д).



цртеж 2в



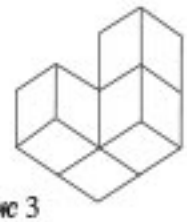
цртеж 2г



цртеж 2д

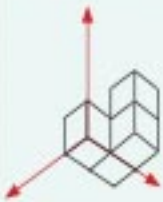
Пример 2

Од колико коцки се састоји 3Д облик на цртежу 3?
Нацтај 3Д облик на изометријском папиру.



цртеж 3

Тродимензионални облик на слици 3 састоји се од 4 коцке.
Цртеж 4а приказује скицу 3Д облика.
На изометријском папиру цртамо координатни систем са осама под углом од 120°.
Затим, према скици, цртамо прве три ивице дуж оса (*цртеж* 4б).
Настављамо цртањем вертикалних ивица, према скици (цртеж 4в).
Затим цртамо све преостале ивице које су паралелне са друге две осе (цртеж 4г).
Цртеж 4е приказује изометријски цртеж датог 3Д облика.



цртеж 4а



цртеж 4б



цртеж 4в



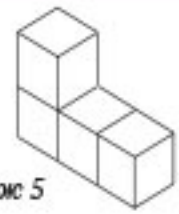
цртеж 4г



цртеж 4д

Задатак 1

Од колико коцки се састоји 3Д облик на *цртежу 5*?
Нацртај 3Д облик на изометријском папиру.



цртеж 5

Задатак 2

Нацртај саксије, приказане на *цртежу* 8, на изометријском папиру:

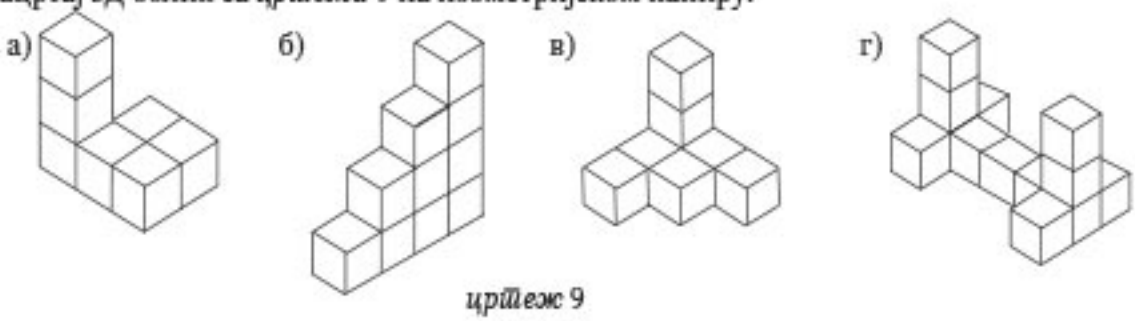


цртеж 8

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

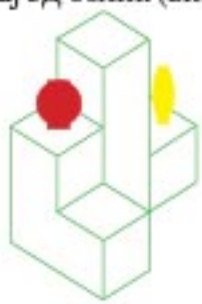
1. Нацртај 3Д облик са *цртежа* 9 на изометријском папиру:

а) б) в) г)



цртеж 9

2. На изометријском папиру нацртај 3Д облик (витрина) са *цртежа* 10:



цртеж 10

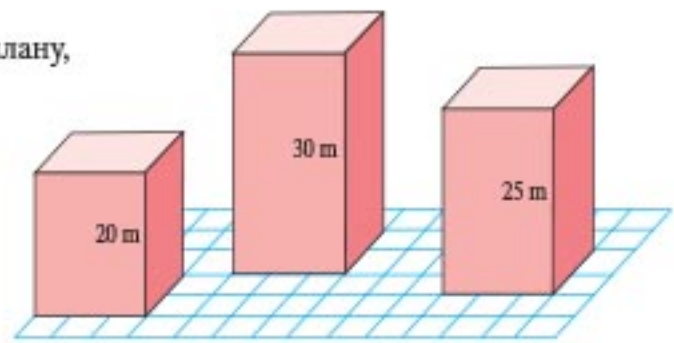
3. Пројектни задатак

Дата је скица стамбено-пословног комплекса који се састоји од три зграде смештене изнад тржног центра који се налази у приземљу. На простору око зграда планирано је хортикултурно уређење и дечије игралиште.

Сваки квадратић на скици, на терену је квадрат са страницом од 5 m.

1) Према скици на *цртежу* 11, нацртај цртеж комплекса на изометријском папиру, узимајући у обзир да је 5 m на терену представљено једном дужи на изометријском папиру.
2) Направи модел комплекса према следећим упутствима:

- дужина једне дужи, која је на терену 5 m, на моделу ће износити 5 cm,
- приземље направи од стиропора дебљине 5 cm,
- моделе зграда направи од картона.
- нацртај врата и прозоре, водећи рачуна о димензијама (сваких приближно 3 m висине зграде садржи један спрат),
- залепи зграде на стиропор према плану,
- уреди простор око зграда према сопственој идеји.



цртеж 11

17. КОМБИНАЦИЈЕ ТРАНСЛАЦИЈА, РОТАЦИЈА И ОСНИХ СИМЕТРИЈА

Активност

У правоугаоном координатном систему означи тачку $A\,(2, 1)$.

а) Изврши транслацију тачке A за 5 јединица улево и 3 јединице надоле. Означи њену слику са A_1.

б) Пронађи слику A_2 тачке A_1 при осној симетрији са осом $y = -2$.

в) Означите са A_3 слику тачке A_2 при ротацији са центром $(0,1)$ и углом од $90°$ у смеру супротном од казаљке на сату.

Наш задатак ће бити да направимо комбинације два кретања (транслације, осне симетрије или ротације) и да пронађемо слику датог оригинала, у односу на изабрани координатни систем.

Пример 1

Дат је троугао ABC са теменима у тачкама $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ и $C(4, 3)$. Дата је осна симетрија са осом симетрије $y = 0$ и ротација са центром у тачки $(0, 0)$ за угао од $90°$, у смеру супротном од казаљке на сату.

Андреј прво примењује осну симетрију, а затим ротацију (*цртеж* 1а), док Адмир прво примењује ротацију, а затим осну симетрију (*цртеж* 1б).

Да ли су добили исту слику троугла ABC?

Андреј следбено добија следеће троуглове:

$A(1, 1) \to D(1, -1) \to G(1, 1)$

$B(3, 1) \to E(3, -1) \to H(1, 3)$

$C(4, 3) \to F(4, -3) \to J(3, 4)$

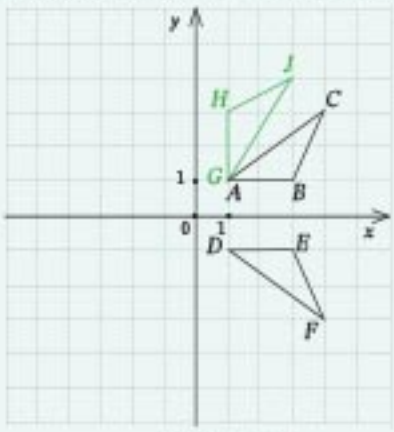
Адмир следбно добија следеће троуглове:

$A(1, 1) \to K(-1, 1) \to N(-1, -1)$

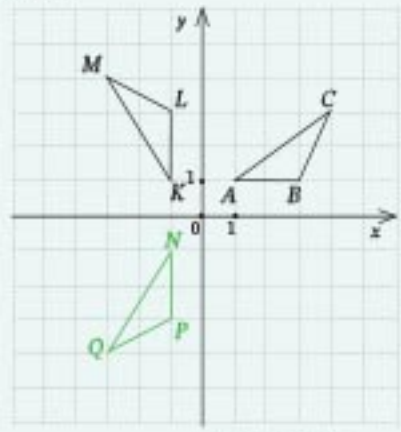
$B(3, 1) \to L(-1, 3) \to P(-1, -3)$

$C(4, 3) \to M(-3, 4) \to Q(-3, -4)$

Андреј и Адмир нису добили исту слику троугла ABC.



цртеж 1а



цртеж 1б

Задатак 1

Дат је троугао ABC са теменима $A(-2, 3)$, $B(1, 0)$ и $C(3, 2)$.

а) Изврши ротирацију троугла ABC око темена B за $90°$ у смеру супротном од казаљке на сату.

б) Затим изврши осну симетрију добијене слике троугла ABC у односу на праву $y = x$.

в) Изврши трансформације обрнутим редоследом. Да ли си добио/ла исту слику троугла ABC?

Пример 2

Дат је троугао ABC са теменима у тачкама $A(-2, 1)$, $B(-2, 0)$ и $C(0, 0)$. Дата је осна симетрија у односу на y-осу и транслација од 3 јединице удесно и 1 јединица према горе. Арта прво примењује осну симетрију, затим транслацију (*цртеж* 2а), док Ана прво примењује транслацију, па затим осну симетрију (*цртеж* 2б). Да ли су добиле исту слику троугла ABC?

Арта следбено добија троуглове:

$A(-2, 1) \to D(2, 1) \to G(5, 2)$

$B(-2, 0) \to E(2, 0) \to H(5, 1)$

$C(0, 0) \to F(0, 0) \to J(3, 1)$

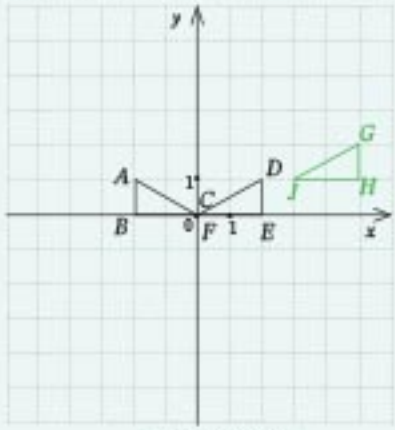
Ана следбено добија троуглове:

$A(-2, 1) \to K(1, 2) \to N(-1, 2)$

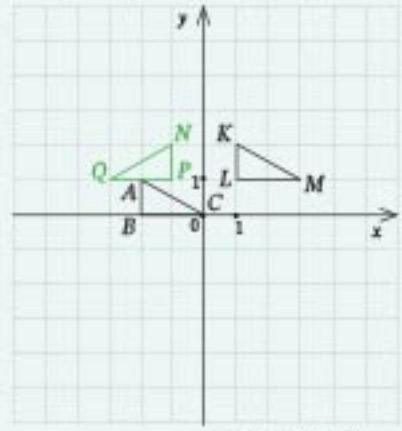
$B(-2, 0) \to L(1, 1) \to P(-1, 1)$

$C(0, 0) \to M(3, 1) \to Q(-3, 1)$

Арта и Ана нису добиле исту слику троугла ABC.



цртеж 2а



цртеж 2б

Задатак 2

Нацртај троугао ABC са теменима $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ и $C(2, 5)$.

а) Пронађи слику троугла ABC са аксијалном симетријом око x-осе.

б) Изврши транслацију добијене слике троугла ABC за 4 јединице улево и 5 јединица према горе.

в) Изврши трансформације обрнутим редоследом. Да ли си добио/ла исту слику троугла ABC?

Пример 3

Дат је троугао са теменима у тачкама $A(-1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Дате су ротација угла од 90° у смеру супротном од казаљке на сату и центар у координатном почетку, и транслација од 1 јединице улево и 3 јединице према доле, Мила је прво применила ротацију, а затим транслацију (*цртеж* 3*а*) док је Мерлинда прво применила транслацију, па затим ротацију (*цртеж* 3*б*). Да ли ће оне добити исту слику троугла ABC?

Мила следбено добија следеће троуглове:

$A(-1, -1) \to D(1, -1) \to G(0, -4)$

$B(-1, -2) \to E(2, -1) \to H(1, -4)$

$C(1, -2) \to F(2, 1) \to J(1, -2)$

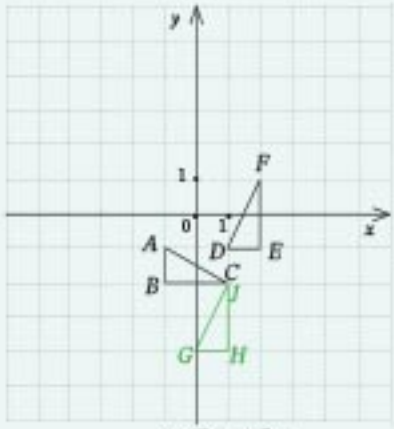
Мерлинда следбено добија следеће троуглове:

$A(-1, -1) \to K(-2, -4) \to N(4, -2)$

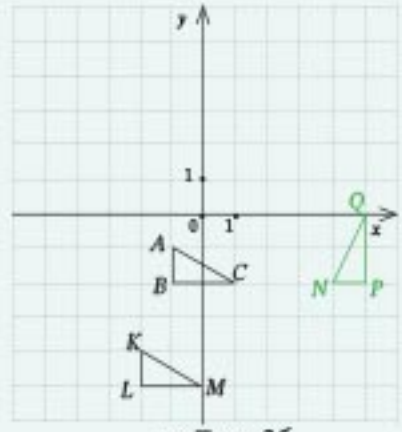
$B(-1, -2) \to L(-2, -5) \to P(5, -2)$

$C(1, -2) \to M(0, -5) \to Q(5, 0)$

Мила и Мерлинда нису добиле исту слику троугла ABC.



цртеж 3а



цртеж 3б

Задатак 3

У правоугаоном координатном систему нацртај троугао ABC са координатама темена $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ и $C(1, 4)$.

а) Изврши ротацију око темена A за 90° у смеру супротном од казаљке на сату.

б) Изврши транслацију слике улево за 2 јединице и према доле за 5 јединица.

в) Изврши трансформације обрнутим редоследом. Да ли си добио/ла исту слику троугла ABC?

Активност

Дат је троугао са теменима у тачкама $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 3)$. Дата је ротација за 180° око координатног почетка и осне симетрија у односу на x-осу. Да ли је редослед извршавања трансформација важан?

Задатак 4

Дат је правоугаоник са теменима у тачкама $P(2, 1)$, $Q(6, 1)$, $R(6, 4)$ и $S(2, 4)$. Извршене су две узастопне трансформације: ротација за 180° у смеру супротном од казаљке на сату око координатног почетка и осне симетрија у односу на осу.

а) Нађи координате тачака P, Q и R након ротације. Означи их са P_1, Q_1 и R_1.

б) Нађи координате тачака P_1, Q_1 и R_1 након осне симетрије.
Означи их са P_2, Q_2 и R_2.

в) Објасни да ли ћеш добити исте тачке ако се промени редослед две трансформације.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

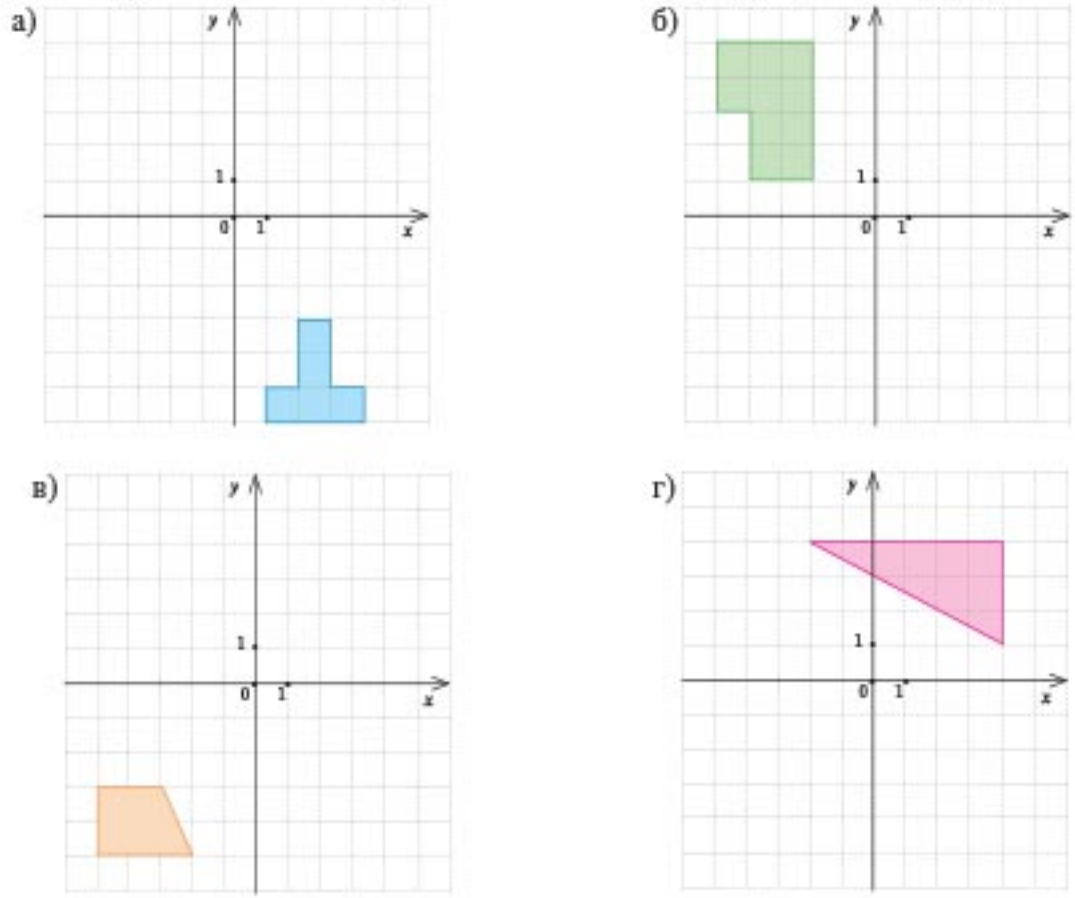
1. На датом облику *цртежа* 4 изврши следеће трансформације:

а) осна симетрија у односу на x-осу, затим транслација за 3 улево и за 4 нагоре,

б) ротација за 180° са центром у $(-1,0)$, затим осна симетрија у односу на праву $y = 1$,

в) осна симетрија у односу на праву $y = -1$, затим ротација за 90° са центром $(0, -3)$ у смеру супротном од казаљке на сату,

г) транслација за 3 улево и 5 надоле, затим осна симетрија у односу на праву $x = -1$.



цртеж 4

2. У правоугаоном координатном систему нацртај троугао ABC са координатама темена $A(0, 2)$, $B(4, 1)$ и $C(2, 5)$.

а) Пронађи слику троугла ABC при осној симетрији у односу на x-осу и означи је са MNP.

б) Изврши транслацију троугла MNP за 4 јединице улево и 5 јединица угоре.

в) Изврши трансформације обрнутим редоследом: прво изврши транслацију троугла ABC за 4 јединице улево и 5 јединица према горе, а затим осну симетрију добијеног троугла у односу на x-осу. Да ли си добио/ла исту слику? Шта закључујеш?

3. У правоугаоном координатном систему, нацртај четвороугао $ABCD$ са координатама темена $A(1, -3)$, $B(3, -2)$, $C(4, 0)$ и $D(3,1)$.
   а) Одреди слику четвороугла $ABCD$ при осној симетрији у односу на праву $y = 1$ и означи је са $MNPR$.
   б) Изврши ротацију четвороугла $MNPR$ са центром у тачки $(0, -1)$ за угао од $90°$ у смеру казаљке на сату.
   в) Изврши трансформације обрнутим редоследом: прво дате ротација $ABCD$, а затим осне симетрије добијеног четвороугла у односу на праву $y = 1$. Да ли си добио/ла исту слику? Шта закључујеш?

4. У спортској дворани се постављају нови ЛЕД рефлектори. Техничар је прво означио места предвиђена за три рефлектора на плану дворане тачкама $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ и $C(4,5)$. Затим му је шеф рекао да план треба прилагодити за други зид дворане. Да би се рефлектори померили у нови положај, потребно је извршити две кретње: осна симетрија у односу на x-осу и транслација за 3 јединице улево и 1 јединицу према доле.
   а) Нађи координате тачака A, B и C након сваке од две трансформације.
   б) Провери да ли ћеш добити исти резултат ако прво извршиш транслацију, а затим симетрију?

5. Дат је троугао са теменима у тачкама $A(1, -1)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$. Дате су две транслације: T_1 која се помера 3 јединице удесно и 4 јединице према горе, и T_2 која се помера 1 јединицу удесно и 3 јединице према доле. Да ли је редослед извршавања трансформација важан?

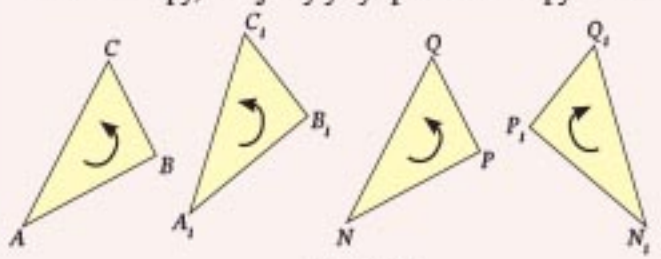
Истраживање

Нацртај две дужи AB и CD, које имају исту дужину и нису паралелне. Притом су A и C, као и B и D, различите тачке. Пронађи ротацију (угао и центар) којом су тачке C и D слике тачака A и B, одговарајуће.
Упутство: Центар ротације је једнако удаљен од тачака A и C, тако да ће лежати на симетрали дужи AC.
Из истог разлога, центар ротације ће такође лежати на симетрали дужи BD.

18. ИДЕНТИФИКОВАЊЕ КОМБИНАЦИЈА ОСНЕ СИМЕТРИЈЕ, РОТАЦИЈЕ И ТРАНСЛАЦИЈЕ

Активност

а) За троуглове на цртежу важи $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta NPQ \cong \Delta N_1P_1Q_1$. Који пар троуглова је у истом смеру, а који су у супротном смеру? Како си закључио/ла? Објасни свој одговор.



цртеж 1



цртеж 2

б) 2D облици на *цртежу* 2 су подударни у паровима. Који пар 2D облика је у истом смеру, а који у супротном смеру? Како си закључио/ла? Објасни свој одговор.

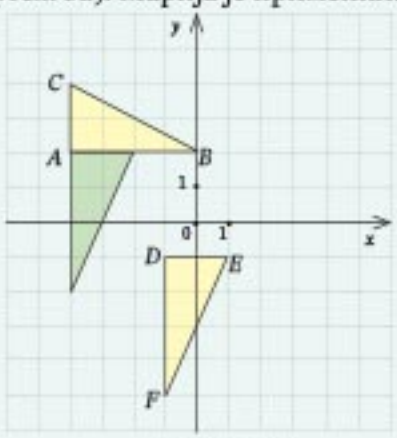
У овој лекцији ћемо покушати да идентификујемо комбинације аксијалне симетрије, ротације и транслације које се користе за промену положаја датог 2Д облика.

Пример 1

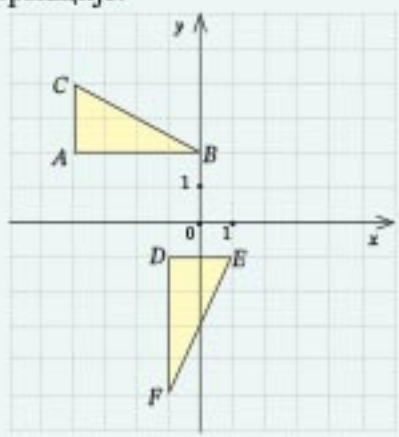
Марија и Мартин траже комбинацију транслација, ротација и осних симетрија којом ће се од оригиналног троугла ABC са теменима $A(-4, 2)$, $B(0, 2)$ и $C(-4, 4)$ добити слика троугла DEF са теменима $D(-1, -1)$, $E(1, -1)$ и $F(-1, -5)$.

Обоје су приметили да су оба троугла у истом смеру. То значи да не би требало да постоји осна симетрија у комбинацији.

Марија је применила ротацију са центром у тачки $(-4, 2)$ и угао од 90° у смеру казаљке на сату, а затим је применила транслацију од 3 јединице удесно и 3 јединице према доле (цртеж 3*а*). Марија је применила две трансформације.



цртеж 3а

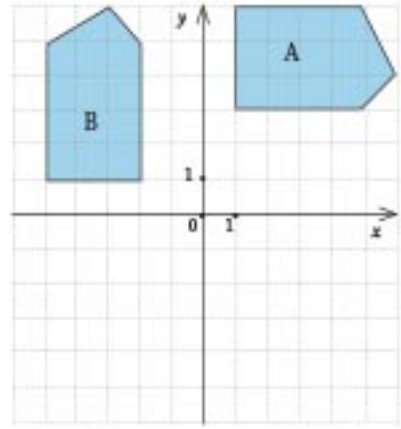


цртеж 3б

Мартин је приметио да ако примени ротацију са центром у тачки $(-4, -1)$ и углом од $90°$ у смеру казаљке на сату, одмах ће добити троугао DEF као што је приказано на цртежу 3*б*. Мартин је применио једну трансформацију.
Значи, Марија је применила две трансформације, а Мартин једну.
Његов метод је једноставнији

Задатак 1

Пронађи комбинацију трансформација која из оригинала *А* добија слику *Б* (*цртеж 4*)

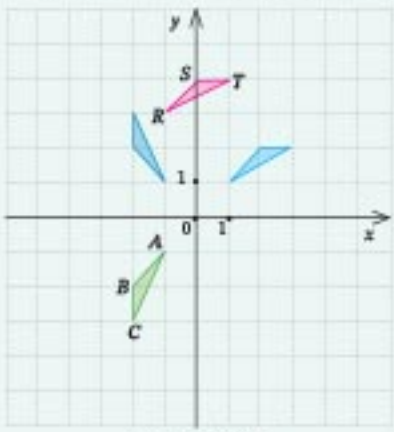


цртеж 4

Пример 2

Наставник је задао Павлу, Стефанији и Петру задатак да пронађу комбинацију транслација, ротација и осних симетрија којом се оригинални – троугао ABC са теменима $A(-1, -1)$, $B(-2, -2)$ и $C(-2, -3)$ трансформише у слику – троугао RST са теменима $R(-1,3)$, $S(0,4)$ и $T(1,4)$.

Павел, Стефанија и Петар су дали следећа решења. Њих троје су приметили да су два троугла супротно усмерена. То значи да је осна симетрија неопходна у комбинацији. Павле је прво применио осну симетрију у односу на x-осу (*цртеж 5а*), затим је применио ротацију са центром у координатном почетку за угао од $90°$ у смеру кретања казаљке на сату, и на крају је применио транслацију за 2 јединице лево и 2 јединице према горе. Применио је три трансформације.



цртеж 5а



цртеж 5б



цртеж 5в

Стефанија је прво применила аксијалну симетрију у односу на линију $y = 1$ (*цртеж 5б*).

Затим је приметила да ако примени ротацију са центром у тачки R и углом од 90° у смеру кретања казаљке на сату, одмах ће добити троугао RST као слику. Стефанија је применила две трансформације.

Петар је прво применио осну симетрију у односу на линију $y = x$ (*цртеж* 5в). Затим је приметио да ако примени ротацију са центром у тачки $(-1, 1)$ и углом од 180°, одмах ће добити троугао RST као слику. Петар је применио је две трансформације.

Заначи, Павле је применио три трансформације, а Стефанија и Петар су применили по две.

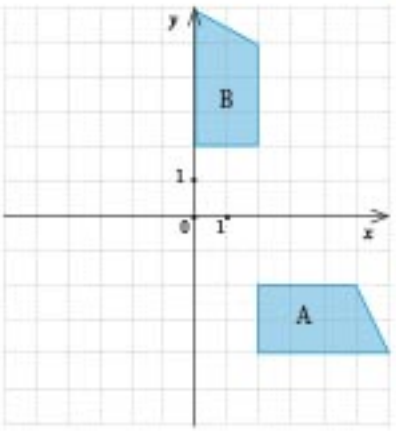
Комбинација коју су идентификовали Стефанија и Петар је једноставнија од Павлове комбинације.

Задатак 2

Реши задатак из претходног примера, разгледавајући твоју четврту варијанту. Упореди твој број трансформација са бројем трансформација Павла, Стефаније и Петра.

Задатак 3

Пронађи комбинацију трансформација којом се из оригинала – четвороугла A, добија слика – четвороугла $Б$ (*цртеж* 6).



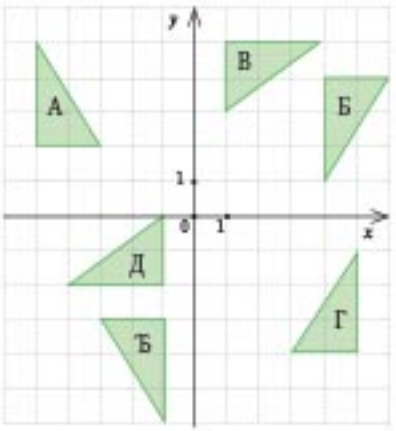
цртеж 6

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пронађи комбинације могућих транслација, ротација и осних симетрија тако да оригинал има координате $A(3,2)$, $B(4,2)$, $C(5,1)$, а слика има координате $M(3,4)$, $N(3,5)$, $P(4,6)$.

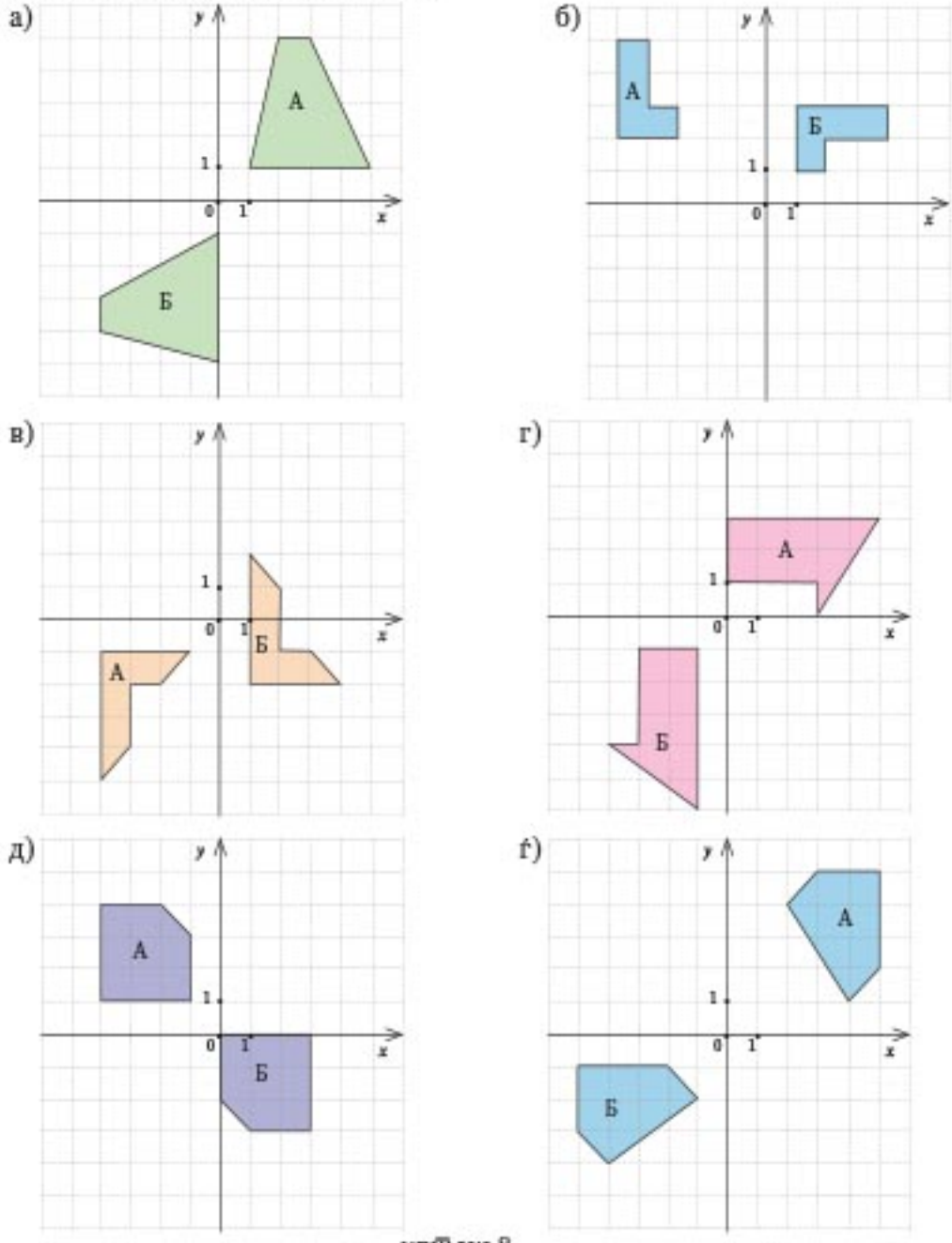
2. Дата су два квадрата $ABCD$ и $MNPQ$ са теменима у тачкама $A(3,2)$, $B(3,3)$, $C(4,3)$, $D(4,2)$ и $M(5,0)$, $N(4,0)$, $P(4,1)$, $Q(5,1)$. Пронађи комбинацију највише три трансформације (транслације, ротације и осе симетрије) за које је $ABCD$ оригинал, а $MNPQ$ његова слика.

3. Пронађи комбинацију могућих транслација, ротација и оса симетрија која трансформише фигуру:
   а) А у Б, б) Г у А, в) Ђ у В,
   г) Д у Г, д) Б у Ђ (*цртеж 7*).



цртеж 7

4. Пронађи комбинацију могућих транслација, ротација и оса симетрија којом се фигура *А* трансформише у фигуру *Б (цртеж 8)*:



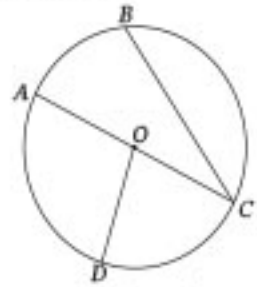
цртеж 8

Истраживање

Иван би хтео да провери да ли се произвољно кретање слике, одређено оригиналном ABC и њеном сликом $A_1B_1C_1$, може представити као комбинација највише три осе симетрије. Он размишља на следећи начин: Са првом осом симетрије, тачка A ће се поклопити са тачком A_1. Затим, са следећом осом симетрије (ако је потребно) друга тачка (B) ће се поклопити са тачком B_1, притом ће тачка A_1 остати у месту. На крају, ако има потребе од треће осе симетрије, трећа тачка (C) ће се поклопити са тачком C_1, а тачке A_1 и B_1 ће остати на месту. Изабери два подударна троугла и провери да ли је Иван у праву.

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Један од два угла са паралелним страницама је 67°. Колико степени има други угао ако:
   а) су њихове странице у истом смеру, б) су њихове странице у супротним смеровима,
   в) је један пар страница у истом смеру, а други пар је у супротним смеровима?
2. Нађи углове α и β са међусобно нормалним крацима, ако:
   а) $\alpha = 118° + \beta$, б) $\alpha = 5\beta$



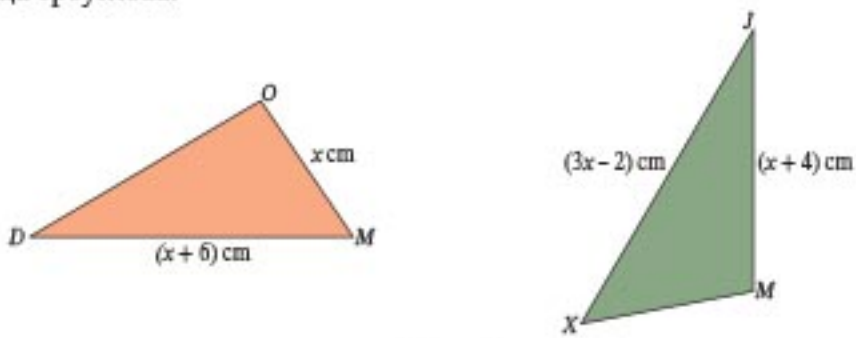
цртеж 1

3. Према *цртежу* 1, наведи све:
   а) кружне исечке, б) кружне одсечке.
4. Нађи периферни угао који је изнад истог кружног лука са централним углом од:
   а) 79°, б) 234°.
5. Нађи непознате углове α и β на *цртежу* 2:



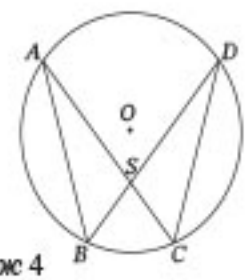
цртеж 2

6. Конструиши правоугли троугао ABC, ако је дата хипотенуза $c = 4{,}8$ cm и угао $\alpha = 30°$.
7. Конструиши једнакокраки троугао ABC, ако је дата дужина катете $b = 5{,}4$ cm и угао код основе $\alpha = 65^0$.
8. Конструиши једнакостранични троугао ABC, ако је дато растојање од центра тежишта до једне странице троугла 1,5 cm.
9. Познато је да је $\Delta DMO \cong \Delta JXM$. Према подацима на цртежу 3, израчунај дужину сваке од страница троуглова.



цртеж 3

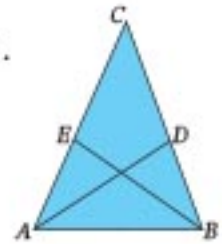
10. Ако је дато да $\overline{AB} = \overline{CD}$ објасни зашто (*цртеж 4*).
    $\Delta ABS \cong \Delta DCS$



цртеж 4

11. Дужи AD и BE леже на симетрали углова у основи једнакокраког троугла ABC (*цртеж* 5). Објасни зашто: а) $\Delta ABD \cong \Delta BAE$, б) $\overline{DC} = \overline{EC}$.

12. Израчунај хипотенузу правоуглог троугла, ако су му катете:
а) $a = 9$ cm и $b = 12$ cm, б) $a = 7$ cm и $b = 24$ cm.

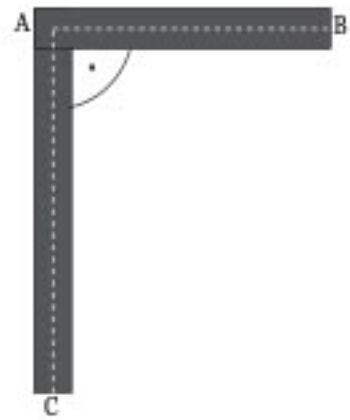


цртеж 5

13. Израчунај једну катету правоуглог троугла, ако хипотенуза и друга катета имају дужине: а) $c = 25$ cm и $b = 15$ cm, б) $c = 37$ cm и $a = 35$ cm.

14. Три раскрснице A, B и C су повезане на такав начин да од A до B постоји прави пут дужине 230 m. Од A до C постоји прави пут дужине 325 m, а угао BAC је прав. (*цртеж* 6). За колико метара ће се скратити путовање од B до C ако се између ове две раскрснице изгради директан пут?

15. У области правог угла налази се тачка M, која је удаљена 2,4 cm и 0,7 cm од својих крака. Израчунај колико је тачка M удаљена од темена правог угла.



цртеж 6

16. Град B се налази 56 km источно од града A. Град C се налази 73 km јужно од града A. Пронађи растојање између градова B и C.

17. Основе једнакокраког трапеза су $a = 85$ cm и $b = 43$ cm, а његова катета има дужину 35 cm. Израчунај висину трапеза.

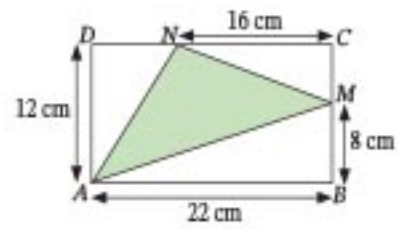
18. Израчунај дијагоналу d_2 ромба, ако су страница и једна дијагонала:
а) $a = 55$ cm и $d_1 = 66$ cm, b) $a = 45$ cm и $d_1 = 72$ cm.

19. Одреди полупречник описаног круга око квадрата са страницом $a = 3$ cm.

20. Израчунај обим троугла AMN, који је уписан у правоугаонику $ABCD$ (*цртеж* 7).

21. Конструиши правоугаоник са дијагоналом $d = 6$ cm и углом између дијагонала 140°.

22. Конструиши паралелограм са дијагоналом $d_1 = 7$ cm, страницом $a = 5$ cm и углом између њих 30°.



цртеж 7

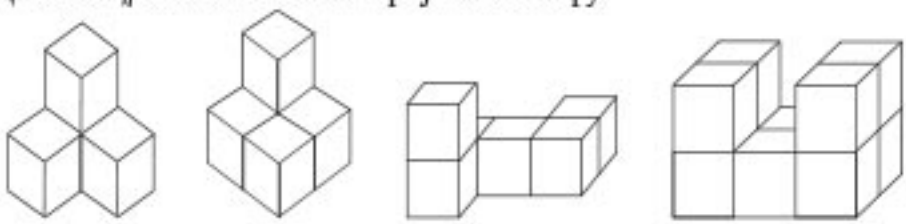
23. Нађи крак једнакокраког трапеза, ако су му основе 38 cm и 24 cm, а висина са краком захвата угао од 45°.

24. Средња линија трапеза је 10,5 cm, а једна основица је 7,2 cm. Израчунај другу основицу.

25. Један од унутрашњих углова делтоида је 47°, а збир једнаких углова је 236°. Израчунај углове делтоида.

26. Колико основних ивица и колико бочних ивица има:
а) деветнаестоугаона призма, б) седамнаесоугаона пирамида?

27. Нацртај 3Д облик *цртежа* 8 на изометријском папиру.



цртеж 8

28. Дат је троугао ABC са теменима $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ и $C(3, 4)$.

а) Пронађи слику троугла ABC под осном симетријом у односу на x-осу и означи је са MNP.

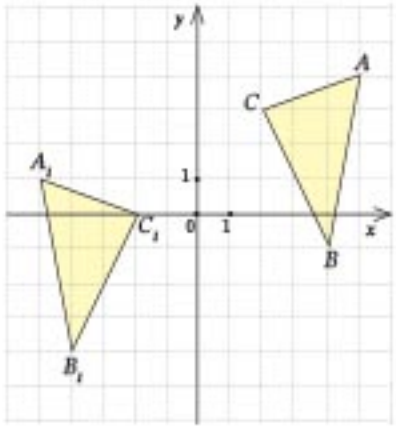
б) Изврши транслацију троугла MNP за 5 јединица улево и 3 јединице према горе.

в) Изврши трансформације обрнутим редоследом. Да ли си добио исту слику? Шта закључујеш?

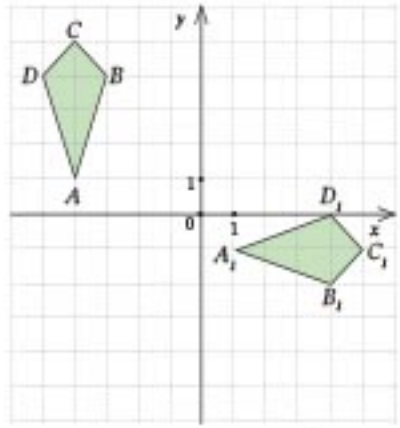
29. Опиши трансформацију којом се:

а) оригинални – троугао $ABCS$ – трансформише у слику – троугао $A_1B_1C_1$ (*цртеж. 9а*),

б) оригиналнии – четвороугао $ABCD$ – трансформише у слику – четвороугаоника $A_1B_1C_1D_1$ (*цртеж 9б*).



цртеж 9а



цртеж 9б

Тема 3:

АЛГЕБРА

Резултати учења:

Проучавајући ову тему, оспособићеш се да:

- решаваш проблеме са целобројним рационалним изразима.
- користиш термине релација и функција у свакодневним контекстима.
- решаваш проблеме тумачењем графика линеарне функције.

1. Моном

Моном. Моном у нормалном облику

Активност

а) Шта је константа, а шта променљива? Шта је израз?
б) Нађи константе и променљиве у следећим изразима: $3x^2$, xy^3, $-4a^3b^2$, y.

Израз формиран константама и променљивим повезаним са знацима операција множења и степеновања са ненегативним целим бројем назива се моном.

Константе ћемо сматрати рационалним бројевима, а променљиве вредностима у скупу рационалних бројева.

Пример 1

а) Све константе су мономи.

б) Изрази, на пример, $-x$, y, $\frac{4}{7}a^2b$, $3x^2$, xy^3, $-4a^3b^2$ су мономи.

в) Изрази, на пример, x^2+1, $\frac{2}{y}$, $\frac{3x-2}{5}$ нису мономи, јер садрже барем по једну операцију сабирања, одузимања и дељења са променљивом.

г) Израз $\frac{y^2}{15}$ је моном, јер га можемо написати као производ $\frac{1}{15}y^2$.

Задатак 1

Који од следећих израза су мономи:

а) $\frac{5}{6}$, б) $8x$, в) $3x+2$, г) $\frac{x}{5}$, д) $\frac{5}{x}$, ђ) $\frac{2x+1}{3}$, е) $-7xy^3z^5$, ж) $\frac{2x^4y^2z}{5}$?

Пример 2

Моном $5x^3y^2zy$ има три променљиве x, y и z. Применом комутативног закона множења и поступка множења степена са истом основом, можемо записати производ yy у облику y^2. Слично, производу $5 \cdot 2 = 10$. Тада је моном $5x^3y2zy$ једнак моному $10x^3y^2z$. Моном $10x^3y^2z$ не може се записати са мањим бројем множилаца ниједним даљим поступком.

Кажемо да је моном записан у **нормалном облику**. Дакле:

$$5x^3y2zy = 10x^3y^2z.$$

При свођењу монома на нормалан облик:
- размештамо множиоце применом комутативног закона;
- множимо константе и записујемо множиоце који означавају исту променљиву у облику степена користећи правило за множење степена са истом основом;
- добијени моном је једнак датом моному.

Договорили смо се да за мономе у нормалном облику прво запишемо множилац који је константа, а затим множиоце који су променљиве.

Пример 3

Сведи моном у нормалан облик: а) $5x^5yxy^2$, б) $2x^3yx^4y(-4xy)$, в) $-xyx^3y^3xy$.

а) $5x^5yxy^2 = 5x^6y^3$, б) $2x^3yx^4y(-4xy) = -8x^8y^3$, в) $-xyx^3y^3xy = -x^5y^5$.

Задатак 2

Сведи моном у нормалан облик:
а) $8ab^2 3ab$, б) x^2yxxy^2, в) $-x^3y^3\,4x^3y^3\,(-6xy)$, г) $2aab3abb4ab^2$.

Константа у моному у нормалном облику којом се множе променљиве назива се коефицијент монома. Производ променљивих у моному назива се главна вредност монома.

Пример 4

Нађи коефицијент и главну вредност монома:
а) $6ab^3c^2$, б) $-xy^3$, в) xy^2z^3, г) $-\frac{3x^2y}{4}$.

а) Моном $6ab^3c^2$ има коефицијент 6 и главну вредност ab^3c^2.

б) Пошто је $-xy^3 = (-1)\cdot xy^3$, коефицијент монома је -1, док је главна вредност xy^3.

в) Пошто је $xy^2z^3 = 1\cdot xy^2z^3$, коефицијент монома је 1, док је главна вредност xy^2z^3.

г) Код монома $-\frac{3x^2y}{4}$, коефицијент је, $-\frac{3}{4}$, а главна вредност је x^2y.

Задатак 3

Нацртај и попуни табелу:

моном	$2{,}5\,a^5b^2$	y^3	$-xyz$	$\frac{x^3y^5}{3}$	$-12x^2$	y^3
коефицијент						
главна вредност						

Степен монома

Активност

Који је степенов показатељ променљиве у моному: а) $5a$, б) $\frac{1}{3}x^2$?

Код монома са једном променљивом, изложилац степен променљиве је степен монома. На пример, моном $-2x^3$ је трећег степена, а моном $7a^4$ је четвртог степена, итд.
Код монома са две или више променљивих, поред степена монома у односу на сваку променљиву посебно, разликујемо и **степен монома у односу на све променљиве**.
У том смислу, код монома $-3xy^2$ променљива x је првог степена, а променљива y је другог степена, па је степен монома у односу на све променљиве $1 + 2 = 3$.

Збир изложилаца променљивих у моному назива се **степен монома**.

Пример 5

Наћи степен монома: а) $2a^2b^3c^4$, б) $5xy^2z$, в) $-xyz$.

а) Збир изложилаца променљивих је $2 + 3 + 4 = 9$, па моном има степен 9.
б) Степен монома $5xy^2z$ је $1 + 2 + 1 = 4$.
в) Свака од променљивих x, y и z је првог степена, па је моном $-xyz$ трећег степена.

Задатак 4

Наћи степен монома:
а) $2xy^3z^2$, б) $5x4y$, в) x^3z^5, г) $3x^3z^3$.

Слични мономи

Активност

Који од монома: $-3xy^2$, $3x^2$, $5xy^2$, $-3x$ и $5x^2y^2$ имају исту главну вредност?

Пример 6

Сведи мономе $3(-2)x^4yy^2$ и $(5^2 - 2^2)xyx^5y^2$ на нормалан облик.
Да ли имају исту главну вредност?

Сведи мономе на нормалан облик: $3(-2)x^4yy^2 = -6x^4y^3$ и $(5^2 - 2^2)xyx^4y^2 = 21x^4y^3$.
Мономи $-6x^4y^3$ и $21x^4y^3$ имају исту главну вредност. Разликују се само по коефицијенту. За њих кажемо да су слични мономи.

Мономи који имају исту главну вредност називају се **слични мономи**.

Задатак 5

Који од следећих парова монома су слични:
а) $-2x$ и $2x^2$, б) $4xy$ и $-3xy$, в) -5 и 5, г) $7a^4b^5aba$ и ab^3a^5?

Супротни мономи

Активност

Дати су мономи $-2x^2$ и $2x^2$.
а) Да ли су слични? б) Који су бројеви њихови коефицијенти?

Пример 7

Мономи $-6x^5y$ и $6x^5y$ имају исту главну вредност. То су слични мономи. Њихови коефицијенти -6 и 6 су супротни бројеви. Кажемо да су мономи један другом супротни.

Два слична монома са супротним коефицијентима називају се **супротни мономи.**

Пример 8

Нађи супротне мономе монома:
а) $-4xy^3$, б) $-6a^4b^6$, в) $7{,}5x^2y^3$, г) $-\frac{2}{3}x^9y^7z$.

Супротни моном монома $-4xy^3$ је моном $4xy^3$, б) $6a^4b^6$, в) $-7{,}5x^2y^3$, г) $\frac{2}{3}x^9y^7z$.

Задатак 6

Нађи супротне мономе монома: а) $-4xy^3$, б) xy, в) -6, г) $7{,}5x^2y^3$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Који од следећих израза су мономи:
   а) 10, б) $2x$, в) $5x+1$, г) $\frac{x^2}{2}$, д) $\frac{1}{x^3}$, ђ) $\frac{x-1}{4}$, е) $-3xy^3z^4xy^2$, ж) $\frac{x^4y^2z}{7x^2y}$?
2. Сведите моном у нормалан облик:
   а) x^5y^3xy, б) $3ab(-2a^3b)$, в) $-5xy^2x^2y^3(-6xy)$, г) $ab2abb4a^2$.
3. Препиши и допуни табелу:

моном	$3ab$	$-5x^3y^3$	$x^5y^2z^4$	$\frac{x^3y^4}{9}$	$\frac{-x}{8}$	$-xy^5$
коефицијент						
главна вредност						
степен монома						

4. Који од следећих парова монома су слични:
а) $3x$ и $3x^2$, б) $5x^2y$ и $-3x^2y$, в) 1 и 5, г) a^3b и ab^3?

5. Напиши два монома слична моному: а) $4x^2$, б) $5x^2y$, в) 7, г) a^2b^3.

6. Нађи супротни моном моному: а) $-x^3$, б) $6x^2y^2$, в) $-3{,}7$, г) $15y^8$.

7. Нађи степен монома: а) a^3b, б) $4x^2y^3z$.

8. Запиши: а) три слична са степеном 7, б) два супротна монома са степеном 5.

9. а) Напиши израз за број фломастера купљених за 4 књижаре, ако је за сваку купљено x кутија са x паковања, а свако паковање садржи y фломастера.
б) Добијени израз сведи у нормалан облик.

10. Пчелар има 3 пчелињака са x сандука пчела. У сваком сандуку се налази y рамова, а на сваком раму y^3 пчела.
а) Напиши израз за укупан број пчела које пчелар има.
б) Добијени израз сведи у нормалан облик.
ц) Одреди коефицијент и главну вредност монома.

Истраживање

1. Дефинисали смо константе и променљиве у случају када имамо бројни израз. Покушај да одговориш на питање: Шта ће бити константе, а шта променљиве у геометрији? НАЦРТАЈ троугао ABC, праву a и тачку M. Облици које си нацртао су константе. На пример, тачка M је константа, јер је тачно одређена у равни. НАПИШИ: троугао XYZ, права c, тачка S. Да ли су ови облици, а да нису дати у равни, променљиви? Зашто?

2. а) Који израз користимо за израчунавање обима једнакостраничног троугла? Да ли је тај израз моном? Који је коефицијент, а која је главна вредност монома?
б) Наведи примере монома које користимо у мерењу и геометрији, а који имају виши степен од оног датог у примеру. Шта рачунамо са њима?

2. САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ МОНОМА

Сабирање монома

Активност

Ученици спроводе експеримент са растом биљака. Раст биљке у првој недељи је описан изразом $3x$, а у другој недељи изразом $5x$.
Напиши израз који показује колико је биљка порасла за две недеље.

Подсетимо се да се слични мономи у алгебарском збиру смањују сабирањем њихових коефицијената, док променљиве остају исте. На пример, имамо да је

$7x + 5x = (7 + 5)x = 12x.$

Збир два слична монома је моном чији је коефицијент једнак збиру коефицијената сабирака, а главна вредност је једнака главној вредности сабирака.

Пример 1

Наћи збир сличних монома: а) $5y^3$ и y^3, б) $2x^4y$ и $-2x^4y$,

а) $5y^3 + y^3 = (5 + 1)y^3 = 6y^3$ б) $2x^4y + (-2x^4y) = (2 + (-2))x^4y = 0 \cdot x^4y = 0$

Уочи да је збир два супротна монома једнак нули.

Комутативни и асоцијативни закони важе за сабирање сличних монома. Зато можемо сабирати мономе било којим редоследом и груписати мономе на било који начин.

То исто тако, значи да можемо говорити о збиру неколико сличних монома.

Пример 2

Израчунај сабирање сличних монома: а) $3x^3yz^4$, x^3yz^4 и $7x^3yz^4$, б) $\frac{1}{2}ab$, $2\frac{1}{2}ab$ и $7ab$.

а) $3x^3yz^4 + x^3yz^4 + 7x^3yz^4 = (3 + 1 + 7)x^3yz^4 = 11x^3yz^4$,

б) $\frac{1}{2}ab + 2\frac{1}{2}ab + 7ab = \left(\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 7\right)ab = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + \frac{14}{2}\right)ab = 10ab$.

Задатак 1

Наћи збир сличних монома: а) $2x^3$ и $3x^3$, б) $3x^2y$ и $-5x^2y$, в) $-xy^3z^4$, $7xy^3z^4$, и $0{,}5\,xy^3z^4$.

Пример 3

Цена оловке је x^2 денара, а цена гумице је двоструко већа. Марина је купила 5 оловака и гумицу.

а) Напиши израз који представља укупну цену гумице и оловака.

б) Скрати добијени израз.

а) Цена 5 оловака је $5x^2$, а цена гумице је $2x^2$, па је израз за укупну цену $5x^2 + 2x^2$.

б) Добијени израз је збир два слична монома, па имамо $5x^2 + 2x^2 = (5 + 2)x^2 = 7x^2$.

Пример 4

Наћи збир монома $5x^2$ и $3y$.

Мономи $5x^2$ и $3y$ нису слични, па ћемо њихов збир написати као алгебарски збир $5x^2 + 3y$.

Пример 5

Наћи збир монома:
а) $5a^2b$, $-3ab^2$, $-a^2b^2$, $4ab$, $6a$ и $2b$, б) $3a^2$, $5a^2b$, $-a^2b$, b, $-3b$ и 4.

а) Збир датих монома записујемо као алгебарски збир

$5a^2b + (-3ab^2) + (-a^2b2) + 4ab + 6a + 2b =$

$= 5a^2b - 3ab^2 - a^2b^2 + 4ab + 6a + 2b.$

б) $3a^2 + 5a^2b + (-a^2b) + b + (-3b) + 4$ = Тражени збир записујемо као алгебарски збир.

$= 3a^2 + \underline{5a^2b} - \underline{a^2b} + \underline{b} - \underline{\underline{3b}} + 4$ = Сабирамо сличне мономе.

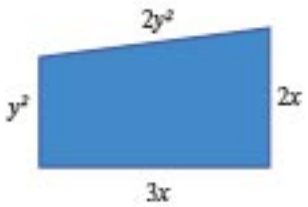
$= 3a^2 + 4a^2b - 2b + 4$

Задатак 2

Наћи збир монома:
а) a^2 и $-3a$, б) $2a^2b$, ab^2, b, $-a^2b$ и $-6ab^2$, в) $4x^4y^2$, $5x^2y$, xy, $-5x^2y$ и $4x^4y^2$.

Задатак 3

Наћи обим трапеза на *цртежу* 2.



цртеж 2

Одузимање монома

Активност

Анина висина је дата изразом $3x$, а висина њеног оца изразом $5x$. Напиши израз који показује колико је Анин отац виши од Ане.

Пример 6

Наћи разлику монома $5a^2$ са мономом a^2.

Уочимо да су дати мономи слични. Применом дистрибутивног закона добијамо

$5a^2 - a^2 = (5 - 1)\,a^2 = 4a^2.$

Разлика монома са сличним мономом је моном чији је коефицијент једнак разлици коефицијента умањеника и коефицијента умањиоца, а главни део је једнак главном делу вредности умањеника (умањиоца).

Према томе, разлика два слична монома је моном сличан њима.

Пример 7

Наћи разлику: а) $-6x^3 - 2x^3$, б) $2x^2y - (-5x^2y)$.

а) $-6x^3 - 2x^3 = (-6 - 2)x^3 = -8x^3$, б) $2x^2y - (-5x^2y) = (2-(-5))x^2y = 7x^2y$.

Задатак 4

Наћи разлику: а) монома $-5x^2$ са мономом $-5x^2$, б) монома $2xy$ са мономом $-2xy$

Пример 8

Наћи разлику монома $2x^3y$ са мономом 5^2x.

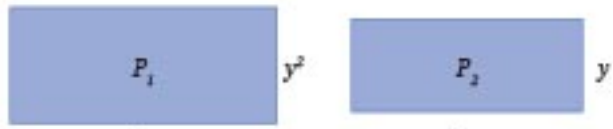
Дати мономи нису слични. Тражена разлика је алгебарски збир
$2x^3y + (-5x^2) = 2x^3y - 5x^2$.

Задатак 5

Наћи разлику: а) монома $-4a^2b$ са мономом $5ab$, б) монома $2x^2y$ са мономом $-2x^2y$.

Пример 9

Наћи разлику површина правоугаоника на *цртежу* 1:



цртеж 1

Површине датих правоугаоника су $P_1 = 5xy^2$ и $P_2 = 2xyy = 2xy^2$.
Њихова разлика ће бити $P_1 - P_2 = 5xy^2 - 2xy^2 = (5 - 2)xy^2 = 3xy^2$.

Пример 10

У школи је организована акција садње дрвећа. Ученици осмог разреда саде дрвеће у различитим редовима. Ана је у првом реду посадила $3x$ дрвцета, а у другом још $5x$ дрвцета. Бојан је у трећем реду посадио $9x$ дрвцета, али је због малог простора морао да уклони $2x$ дрвцета.

а) Колико је дрвцета Ана укупно посадила?
б) Колико је дрвцета Бојану остало након уклањања?
в) Ко је на крају посадио више дрвцета и за колико?

а) Ана је посадила $3x + 5x = 8x$ дрвцета.
б) Бојан је посадио $9x$ дрвцета, али је уклонио $2x$, па је Бојан посадио $9x - 2x = 7x$ дрвцета.
в) Разлика у броју засађених стабала између њих је $8x - 7x = x$. Ана је засадила x више стабала него Бојан.

Задатак 6

Првог дана, Јана је посадила $2x^2$ лала, другог дана је посадила 5 лала више, а трећег дана, x^2 више него другог дана.

а) Напиши израз који представља укупан број лала које је Јана посадила.

б) Поједностави израз добијен под а).

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Наћи збир монома:
   а) y^2 и $3y^2$, б) $-x^2y$ и $4x^2y$, в) $-5x^3$ и $-5z^3$, г) $3abc$ и $4a^2b^2c^2$.
2. Одреди збир монома:
   а) $6xy^2$, xy^2 и $3xy^2$, б) $5xy$, $-xy$, $-2xy$ и $4xy$, в) $-3x^2$, $-2x^2$, x^2 и $-x^2$, г) b^3, $2b3$, $3b3$ и $4b3$.
3. Од монома $-2x^3$ одузми моном: а) $5x^3$, б) x^3, в) $-2x^3$, г) $-3x^3$.
4. Од монома $5x^2y^3$ одузми моном: а) $3x^2y^3$, б) $7x^2y^3$, в) $-4x^2y^3$, г) $-x^2y^3$.
5. Од збира монома $-4a^2b$ и $-3a^2b$ одузми моном $-5a^2b$.
6. Од збира монома $-3xy^2$ и $2xy^2$ одузми њихову разлику.
7. Поједностави израз:
   а) $8a^2 + 3a^2 + 4a^2 + 3$, б) $2x^2 - y^3 - 4x^2 + 3y^3 - 1$,
   в) $a - 4b^2 + 2a - b^2 + 1$, г) $4x^2 + 2y^2 - 3x^2 + y^2 - x^2 - 2$.
8. Поједностави израз:
   а) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}x^2$, б) $\frac{3}{5}a+\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b$, в) $\frac{2}{3}x+5-\frac{5}{6}x+\frac{4}{3}$.
9. Првог дана Олег је претрчао $2x^3$ метра, другог дана x^3 метра више, трећег дана $2x$ метара
   више него другог дана, а четвртог дана $2x$ метара више него првог дана.
   а) Напиши израз који представља укупан број метара које је Олег претрчао сва током четири дана.
   б) Упрости израз добијен под а).

3. ПОЛИНОМ. СТЕПЕН ПОЛИНОМА

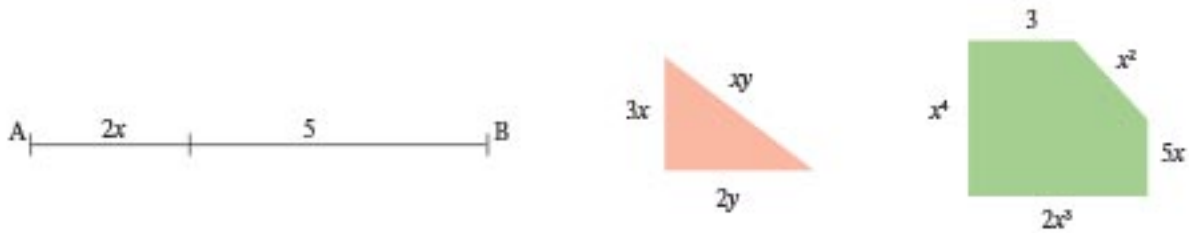
Полином. Полином у нормалном облику

Активност

Од колико монома је формиран израз: а) $7a^2b + 4ab^2$, б) $4x^5 - 2x^3y + y^4$?

Пример 1

Према подацима на *цртежу* 1, напиши израз за:
а) дужину дужи AB, б) обим троугла,
в) обим петоугла.
Од колико монома се састоји сваки од добијених израза?



цртеж 1

а) Дужина дужи AB се записује као $2x + 5$.
б) Израз за обим троугла је алгебарски збир $3x + 2y + xy$.
в) Обим петоугла се записује као $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.

Израз $2x + 5$ је алгебарски збир два монома, израз $3x + 2y + xy$ је алгебарски збир три монома, а израз $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$ је алгебарски збир пет монома.

- Израз који представља алгебарски збир коначно много монома назива се **полином**.
- Мономи који чине полином називају се **чланови полинома**.

Полиноми су, на пример, изрази: $x^2 - xy + 1$, $2a + 3$, $y^3 - 2y^2 + y + 4$ и $x^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 3$.
Чланови полинома $a^7 - 2a^3 + a - 5$ су мономи: a^7, $-2a^3$, a и -5.

Пример 2

Који од израза $3x^6 - x + 5$, $\frac{3}{5b}$, $a + 1$, $\frac{x+2}{y}$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$, $\frac{1}{x} + 3$, $8a^2b$ су полиноми?

Полиноми су изрази: $3x^6 - x + 5$, $a + 1$, 18, $3x^2 + \frac{1}{6}x$, $z^5 - 3$ и $8a^2b$.
Изрази $\frac{3}{5b}$, $\frac{x+2}{y}$ и $\frac{1}{x} + 3$ нису полиноми јер садрже дељење са променљивом.

Активност

Сведи га у нормалан облик и пронађи коефицијент монома:
а) $5x^2y^3xy^2$, б) $-3a^3ab^{24}aab^2$.

Пример 3

Сведи полином $2x^3 + 3xx^2 - 4$ у нормалан облик.

Прво, треба да проверимо да ли је сваки моном у полиному у нормалном облику.
Моном $3xx^2$ није у нормалном облику.
Пишемо $2x^3 + 3xx^2 - 4 = 2x^3 + 3x^3 - 4$.
Добијени полином садржи сличне мономе, које можемо сабрати, па имамо:

$$2x^3 + 3x^3 - 4 = 5x^3 - 4$$

Добили смо полином који се не може даље поједноставити, па је полином сведен на нормални облик бином $5x^3 - 4$.

- **Полином је у нормалном облику** ако не садржи сличне чланове и сви његови чланови су у нормалном облику.
- Коефицијенти монома који чине полином у нормалном облику називају се **коефицијентима полинома**.

Полином $5x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ је у нормалном облику. Његови коефицијенти су: 5, 6, −2 и 4.

Задатак 1

Који од следећих полинома су у нормалном облику:
а) $x^3 - (xy)^2 + 4$, б) $2xx^2 - 3x + x + 5$, в) $5xy + 6x + 1$, г) $3a + 4b + 5$?

Пример 4

Сведите полином у нормалан облик:
а) $4xy + 5x - xy + x + 1$, б) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$.
в) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$

а) $4\underline{xy} + 5\underline{x} - \underline{xy} + \underline{x} + 1$ — Подвлачимо мономе који су међусобно слични.
$= (4 - 1)xy + (5 + 1)x + 1 =$ — Сабирамо сличне мономе.
$= 3xy + 6x + 1$

б) $ab - b + 2a + 3b + a + 4$
$= ab - \underline{b} + \underline{2a} + \underline{3b} + a + 4$
$= ab + 2b + 3a + 4$

в) $3x^3 - 7x + 6x + x^2 + x^3 + x + 3x^2$
$= \underline{\underline{3x^3}} - \underline{7x} + \underline{6x} + \underline{\underline{x^2}} + \underline{\underline{x^3}} + \underline{x} + \underline{\underline{3x^2}}$
$= 4x^3 + 4x^2$

Задатак 2

Сведи полином у нормалан облик:
а) $5xy + 6x - 3xy + 1$, б) $2a + 5b - 3 - b + 3a + 6b + 4$, в) $x^3 - (3x)^2 + x - 8$,
г) $3xx^3 - 2x + 7x + x^2y^2 + 1$, д) $xy + 3xy^2 + 6xy - 3xy + 2x^2y^2$.

Активност

Колико чланова има полином: а) $xy^3 + 2xy$, б) $3b + 4$, в) $x^3 + 2x + 1$?

Полином са два члана назива се биномни полином или **бином**.

У сагласности са дефиницијом, сваки моном је полином. Пошто је свака константа моном, можемо закључити да су константе полиноми.
Након што дати полином доведемо у нормалан облик, према броју чланова, разликујемо када је полином моном, бином или полином са више чланова.

Пример 5

Који од полинома $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a2b^2$, $2x - 5x + 4x$, $-4x^3+7$ и $7x^2y$ су:
а) мономи, б) биноми?

Полиноми $-4x^3 + 7$ и $7x^2y$ су у нормалном облику.
Запишимо и полиноме $5xx^2 - 3x + x$, $\frac{x}{5} - \frac{x}{5}$, $5a^2b^2 + 2a^2b^2$, $2x - 5x + 4x$ у нормаланом облику.

$5xx^2 - 3x + x = 5x^3 - 3x + x = 5x^3 - 2x$, $\quad \frac{x}{5} - \frac{x}{5} = 0 \cdot x = 0$,
$5a^2b^2 + 2a^2b^2 = 7a^2b^2$, $\quad 2x - 5x + 4x = x$

а) Мономи су полиноми 0, x, $7a^2b^2$ и $7x^2y$.
б) Биноми су полиноми $5x^3 - 2x$ и $-4x^3 + 7$.

Задатак 3

Који од полинома $-6xy + 5xy$, $2xx + 5$, $x^4 + 2xx^3 + x^2 + 5xx$ и $x^2 + 3x^2$ су:
а) мономи, б) биноми?

Степен полинома

Као и код монома, тако и код полинома, можемо дефинисати степен полинома.

Пример 6

Наћи степен полинома: а) $5x^2y + 6xy + 1$, б) $3xy^2 + 2xy^2 - (3xy) + 2xyx^2y^2$.

Да би нашли степен полинома, полином мора бити сведен на нормалан облик.
а) У овом случају, полином је у нормалном облику.
Моном $5x^2y$ има степен $1 + 2 = 3$. То је највиши степен међу степенима монома у полиному, тако да је степен полинома $5x^2y + 6xy + 1$ једнак 3.
б) Прво, ћемо свести полином у нормалан облик:
$3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2xyx^2y^2 = 3xy^2 + 2xy^2 - 3xy + 2x^3y^3 = 5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$.
Међу три монома у полиному, моном $2x^3y^3$ има највиши степен $3 + 3 = 6$.
Закључујемо да је степен полинома $5xy^2 - 3xy + 2x^3y^3$ једнак 6.

Степен полинома у нормалном облику назива се највиши степен међу степенима монома од којих је састављен полином.

Задатак 4

Наћи степен полинома:

а) $2xy + x + 3$, б) $a + 5b + 4$, в) $x^3 - x^2 + 5x - 8$,

г) $xx^2 - x^3 + 7x + xy$, д) $xy^2 + 6xy - 3xy + 2x2y$, ђ) $2x2y^3 + xy^2z - 3xy^2z + xxyy^2$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Који од следећих израза $2x^3 - 8$, $3x + 7x + 1$, $4xy^2 - xy + x^2y - xy$, $2y^2 - yy$, $ab - 3a + 4b + 5ab$, $9x + x$, $2(xy)^2 + 3x^2y^2$ су: а) мономи, б) биноми?

2. Употребом монома $\frac{5}{6}a^2$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{9}a^3$ и $-\frac{3}{4}a$ напиши по три од сваког:
а) бинома са степеном 3, б) полиноме са степеном 2, в) полинома са степеном 3.

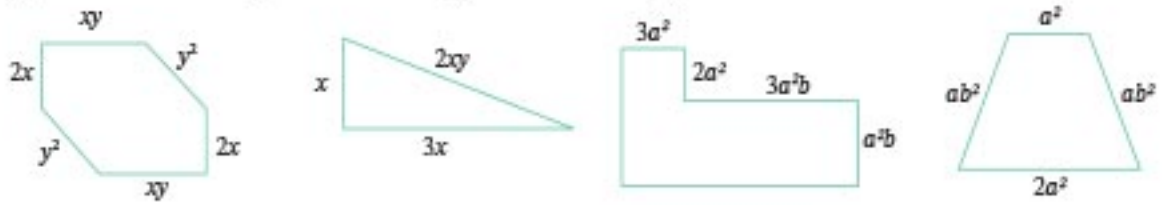
3. Наћи степен полинома:
а) $x + 5$, б) $ab + 1$, в) $x^3 + x - 1$, г) $xy^3 + x + xy$, д) $x^5y - y^5 + x^2y^2$,
ђ) $ab - 3a^2b + aab + 4ab$, е) $2x^2 + y^3 + xy^2z - 3$, ж) 23.

4. Напиши полином степена: а) 7, б) 2, в) 1.

5. Напиши полином у нормалном облику:
а) $a + 5b - 7 - a + 2a + 6b + 4$, б) $xy + 5x - 4xy + 2$, в) $2x^3 - 3x^2 + xxx - x^2$,
г) $3x^3 - 2x + 7x^2 + x^3 + 5x + 2x^2 + 1$, д) $xyx + 3xy^2 + 4xxy - 3xyy + 2xy$.

6. Напиши израз за обим фигуре и сведи га на нормални облик (*цртеж* 2):

а) б) в) г)

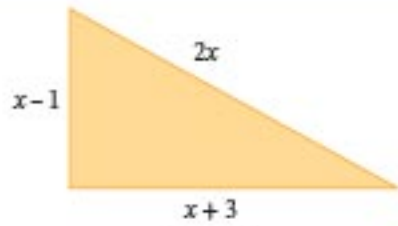


цртеж 2

4. САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ ПОЛИНОМА

Активност

Напиши израз за обим троугла на *цртежу* 1 и поједностави га.



цртеж 1

Пример 1

Нађи збир:
а) монома $2x^2$ и полинома $2x^3 + 3x^2 + x + 4$, б) полинома $3x^2 + x^2y + x + 4$ и $5x^2y + 3xy + 2$.

а) $2x^2 + (2x^3 + 3x^2 + x + 4)$ — Ослобађамо се заграда.
$= 2x^2 + 2x^3 + 3x^2 + x + 4$ — Сводимо сличне мономе.
$= 2x^3 + 5x^2 + x + 4$ — Подређујемо чланове полинома по степену.

б) $(3x^2 + x^2y + x + 4) + (5x^2y + 3xy + 2)$
$= 3x^2 + x^2y + x + 4 + 5x^2y + 3xy + 2$
$= 3x^2 + \underline{x^2y} + x + \underline{\underline{4}} + \underline{5x^2y} + 3xy + \underline{\underline{2}}$
$= 3x^2 + 6x^2y + x + 3xy + 6$

Полиноми (моном са полиномом) се сабирају тако што се једном полиному (моному) узастопно додају чланови другог полинома. Затим се у добијеном полиному своде слични мономи.

Задатак 1

Нађи збир полинома:
а) $4x^2 - 5x + 3$ и $5x^2 - x + 1$,
б) $3x^3 + 5x^2 + 2x + 4$ и $x^3 - 3x^2 + x$,
в) $4x^2 + 5x^2y + y + 2$ и $5x^2y + 3y + 5$,
г) $x^2y + 2x^3y + xy + 4x$ и $5x^2y + 3x - 2xy$.

Задатак 2

Једна њива даје (x^2+2xy) kg пшенице, а друга $(3x^2-xy+4y)$ kg.
а) Састави израз који приказује укупну жетву.
б) Сведи добијени полином на нормалан облик.

Пример 2

Од полинома $x^3 - 3x^2 + 1$ одузми моном $2x^2$.

$(x^3 - 3x^2 + 1) - 2x^2$	Ослобађамо се заграда.
$= x^3 - 3x^2 + 1 - 2x^2$	Сводимо сличне мономе.
$= x^3 - 5x^2 + 1$	Подређујемо чланове полинома.

Пример 3

Од полинома $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ одузети полином $x^3 - 3x^2 + 3x$.

$(2x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x)$	Ослобађамо се заграда. Знак минус (–)
$= 2x^3 + x^2 + 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x$	испред заграде мења знаке чланова у полиному
$= \underline{2x^3} + \underline{x^2} + \underline{2x} + 1 - \underline{x^3} + \underline{3x^2} - \underline{3x}$	у супротне. Сводимо сличне мономе.
$= x^3 + 4x^2 - x + 1$	Подређујемо чланове полинома.

Полиноми се одузимају тако што се полиному – умањенику узастопно додају чланови полинома – умањиоца са супротним знацима. Затим се у добијеном полиному своде слични мономи.

Из решених примера можеш видети да су дати полиноми записани у заградама, а затим се ослобађамо заграда. На основу правила за сабирање и одузимање полинома, могу се извести следећа правила за ослобађање од заграда:

- Ако **испред заграде стоји знак плус (+)**, онда се заграда може изоставити, и знаци чланова у загради остају непромењени.
- Ако **испред заграде стоји знак минус (–)**, онда се заграда и знак минус могу изоставити, а знаци чланова у загради се мењају у супротне.

Задатак 3

Од полинома $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ одузми:
а) моном $5x^3$, б) бином $-3x^2 + 2$, в) полином $2x^3 + x^2 + x + 1$.

Задатак 4

Израчунај разлике:
а) $(3x^2 + 2xy - 8y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$, б) $(6x^2 - 5xy + 4y^2) - (2x^2 - 3y^2)$.

Пример 4

У кабинету из биологије, ученици истражују раст две различите врсте биљака у зависности од количине ђубрива коју примају. Раст прве биљке описан је полиномом $2x^2 + 3x + 4$, а раст друге биљке полиномом $x^2 + 5x + 2$.
После неколико дана, истраживачи додају додатну количину ђубрива, што повећава раст сваке биљке за $2x$ јединице.
а) Колики ће бити нови раст сваке биљке након додавања ђубрива?
б) Колики ће бити укупан раст обе биљке заједно након додавања ђубрива?
в) Колико је раст прве биљке већи од раста друге биљке након додавања ђубрива?

а) Нови раст прве биљке биће:

$(2x^2 + 3x + 4) + 2x = 2x^2 + \underline{3x} + 4 + \underline{2x} = 2x^2 + 5x + 4.$

Нови раст друге биљке биће:

$(x^2 + 5x + 2) + 2x = x^2 + \underline{5x} + 2 + \underline{2x} = x^2 + 7x + 2.$

б) Укупан раст се добија сабирањем оба полинома:

$(2x^2 + 5x + 4) + (x^2 + 7x + 2) = \underline{2x^2} + \underline{\underline{5x}} + \underline{\underline{\underline{4}}} + \underline{x^2} + \underline{\underline{7x}} + \underline{\underline{\underline{2}}} = 3x^2 + 12x + 6.$

в) Да би се упоредио раст, полиноми се одузимају:

$(2x^2 + 5x + 4) - (x^2 + 7x + 2) = \underline{2x^2} + \underline{\underline{5x}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{x^2} - \underline{\underline{7x}} - \underline{\underline{\underline{2}}} = x^2 - 2x + 2.$

Прва биљка има раст за $x^2 - 2x + 2$ већи од друге биљке.

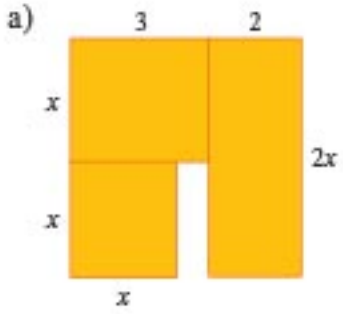
Задатак 5

Ученици припремају цветне леје у школском дворишту. Прву лејy је уредила Маријина група, а другу Петрова група.
Број цветова засађених у првој леји дат је полиномом $2x^2 + 3x + 5$, а број цветова засађених у другој леји полиномом $x^2 + 4x + 2$ (x је дужина леје).
а) Колико цветова су посадиле обе две групе заједно?
б) Колико цветова више има прва леја?

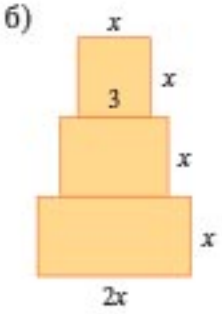
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Сабери полиноме:
   а) $-2x^2 + 3x - 5$ и $3x^2 + 4x + 2$, б) $7x^3 + 2x + 6$ и $3x^3 + 5x^2 - 5$, в) $x^2 + x - 1$ и $3x^3 + 2x^2 - 3$.
2. Нађи збир $(x^4 + 4x^2y - 5xy - 2x + 7) + (2y^3 - 4x^2y + 3xy + y - 6)$.
3. Одреди разлику $(2x^2 + 3xy - 5y - 2x + 4) - (2y^3 - 4xy + 2y - 3)$.
4. Сабери полином $9x^3 + 10x^2 - 5x + 7$ и разлику бинома $x + 2$ и $x^3 + 9$.
5. Израчуна полином P:
   а) $5a^2 + 2a - 3 + P = 9 - 6a + 2a^2$, б) $5b^2 + b + 15 - P = 15 + 3b + 7b^2$.

6. Напиши полином у нормалном облику којим ћеш изразити површину облика са *цртежа* 2 и *цртежа* 3.



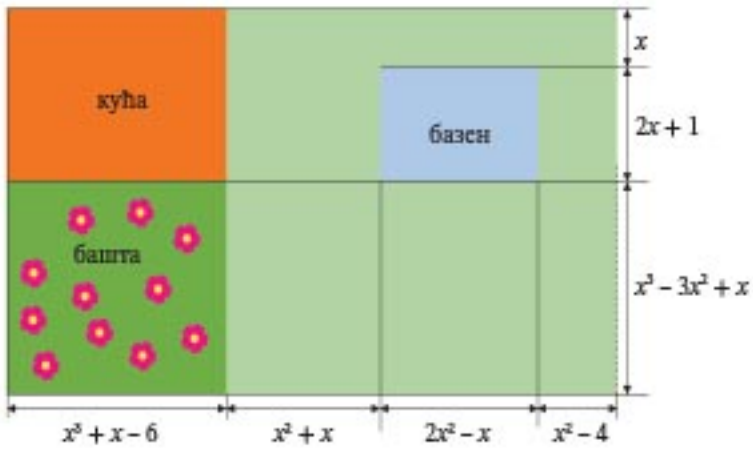
цртеж 2



цртеж 3

7. Током трке аутомобила, након x секунди први аутомобил је прешао $20x^2 + x + 50$ метара, други $15x^2 + x + 30$ метара, а трећи $10x^2 + x + 20$ метара. Колико метара износи растојање између:
а) првог и другог аутомобила, б) другог и трећег аутомобила,
в) првог и трећег аутомобила?

8. *Цртеж* 4 приказује двориште са кућом, баштом и базеном. Напиши полином у нормалном облику који ће изразити обим: а) базена, б) куће, в) целог дворишта.



цртеж 4

Истраживање

Дати су полиноми $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2 - 4$ и $C = -2x^3 + 4$.
а) Нађи степен полинома A, B, C, $A + B$, $A + C$. Шта примећујеш?
б) Према примеру, каква је веза између степена полинома – сабирака и степена полинома – збира?
в) Изведи општи закључак о вези између степена полинома – сабирака и степена полинома – збира.

5. МНОЖЕЊЕ ПОЛИНОМА

Множење монома

Активност

1. Помножи степене $x^3 \cdot x \cdot x^2$.

2. Марко ради у лабораторији. Потребно је да припреми пакет боца са хемијским раствором. Свака боца треба да има исту количину, која се израчунава према изразу $2x^2y$. Колика је укупна количина раствора коју треба да припреми Марко, ако паковање садржи:

а) 16 боца, б) x боца?

Пример 1

Наћи производ монома $-4x^2y^3$ и $5x^3yz$

Применом комутативног и асоцијативног својства множења, добијамо да је:

$-4x^2y^3 \cdot 5x^3yz = (-4 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y^3 \cdot y) \cdot z = -20x^5y^4z$

Моном $-20x^5y^4z$ је производ монома $-4x^2y^3$ и $5x^3yz$.

Производ два монома је моном чији је коефицијент једнак производу коефицијената множитеља, а главна вредност је једнака производу главних вредности множитеља.

За множење монома важи комутативни и асоцијативни закон. Стога, можемо говорити о производу неколико сличних монома.

Пример 2

Израчунај производ монома: а) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4$, б) $-a^2bc \cdot 5ab^3c$, в) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2$.

а) $3a^2 \cdot \frac{2}{9}a^4 = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot a^2 \cdot a^4 = \frac{2}{3}a^6$,

б) $-a^2bc \cdot 5ab^3c = -1 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot b^3 \cdot c \cdot c = -5a^3b^4c^2$,

в) $2xy \cdot (-5x^3z) \cdot yz^2 = 2 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot x \cdot x^3 \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z^2 = -10x^4y^2z^3$.

Задатак 1

Израчунај производ монома:

а) $3x^2 \cdot 4x^4$, б) $-2a^3b \cdot (-ab^2c)$, в) $6x^2y \cdot (-4xyz) \cdot \frac{1}{3}y^2z$.

Пример 3

Један физичар израчунава енергију коју производи машина. Енергија зависи од силе и растојања, који су дати алгебарским изразима: $F=\frac{3}{2}x^2y^3$ и $s=\frac{4}{3}x^3y$.
Колика је укупна енергија E коју производи машина, ако важи формула $E = F \cdot s$?

Према формули за укупну енергију E коју производи машина, имамо
$E = F \cdot s = \frac{3}{2}x^2y^3 \cdot \frac{4}{3}x^3y = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^2y^3 \cdot x^3y = 2x^5y^4$.
Значи, машина производи енергију изражену мономом $2x^5y^4$.

Задатак 2

Мирсад је возио $3xy$ сати истом брзином од $12x^2y$ километара на сат. Наћи пут који је прешао, ако за брзину v, време t и пут s важи формула $s = v \cdot t$

Множење полинома мономом

Активност

Користећи дистрибутивно својство множења у односу на сабирање и одузимање, поједностави изразе: а) $2 \cdot (3x + 4)$, б) $(3x + 4) \cdot 2$.

Пример 4

Извршити множење:
а) $-3x \cdot (2x + 1)$, б) $(2a + b - 1) \cdot (-a2)$, в) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3)$, г) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2$.

а) $-3x \cdot (2x + 1)$ — Множимо моном са сваким чланом полинома.
$= -3x \cdot 2x + (-3x) \cdot 1$ — Добијене производе сабирамо.
$= -6x^2 - 3x$, — Полином сводимо на нормалан облик.

б) $(2a + b - 1) \cdot (-a^2) = 2a \cdot (-a^2) + b \cdot (-a^2) - 1 \cdot (-a^2) = -2a^3 - a^2b + a^2$,

в) $4x^3 \cdot (x^2 + 2x + 3) = 4x^3 \cdot x^2 + 4x^3 \cdot 2x + 4x^3 \cdot 3 = 4x^5 + 8x^4 + 12x^3$,

г) $(5x - 3y^3) \cdot x^3y^2 = 5x \cdot x^3y^2 - 3y^3 \cdot x^3y^2 = 5x^4y^2 - 3x^3y^5$.

Полином се множи мономом тако да се сваки члан полинома множи са мономом, а добијени производи се сабирају.

Задатак 3

Извршити множење:
а) $(3x + 2y) \cdot 5$, б) $3a \cdot (a + 1)$, в) $(2x^2 + x - 4) \cdot 3x$, г) $x^2y \cdot (xy + 2x - 4y^2)$

Пример 5

У једној текстилној фабрици, дужина тканине коју производи машина под нормалним условима израчунава се изразом $x^3 + 2x^2 - x$. Када се температура у просторији повећа, машина производи $\frac{3}{2}x^2$ пута више тканине. Колика је укупна дужина тканине коју производи машина при повећаној температури?

Укупна дужина тканине се добија множењем полинома и монома:

$$(x^3 + 2x^2 - x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = x^3 \cdot \frac{3}{2}x^2 + 2x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 + (-x) \cdot \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3.$$

При повећаној температури, машина ће произвести укупну дужину $\frac{3}{2}x^5 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^3$.

Задатак 4

Баштован жели да посади различите врсте биљака у школској башти. Једно дрво кошта $4x^3y + 3xy^2 - 5$ денара, један грм кошта $2x^3y - xy^2 + 4$ денара, а један цвет кошта $5xy^2 - 3x^3y + 2$ денара. Баштован је купио 3 дрвета, 4 грма и 5 цветова.

а) Напиши израз за укупну цену за сваку врсту биљки.

б) Напиши израз за укупну цену свих биљака.

в) Напишите полином под б) у нормалном облику.

г) Одреди степен сваког монома и степен сваког полинома.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нађи производ монома:

   а) $5x^3 \cdot 2x^4$, б) $-\frac{1}{4}a^2b \cdot (-2a^3b^2)$, в) $9xy^2 \cdot (-2x^3yz^2) \cdot \frac{1}{6}yz$.

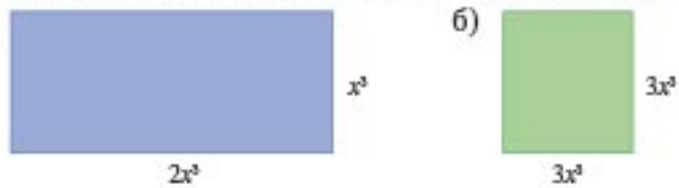
2. Извршите множење:

   а) $4 \cdot (5x - y)$, б) $-7 \cdot (2x - 3y)$, в) $(x^3 + 3x^2 - 4x + 2) \cdot 2x$, г) $-xy^2 \cdot (5x^2 + 2xy - 4y^2)$.

3. Помножи збир монома $-3a^2b^3$ и $2a^2b^3$ са мономом $-4ab$.

4. Помножи разлику монома $-xy^2$ и $3xy^2$ њиховим збиром.

5. Напиши моном у нормалном облику који изражава површину правоугаоника (*цртеж* 1)



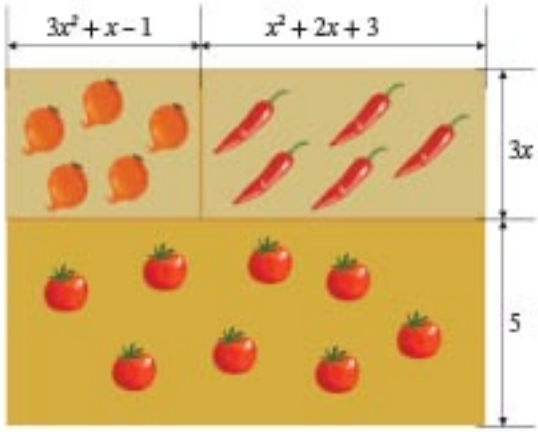
цртеж 1

6. Миа има $4(x^2 + x + 1)$ књиге. Лина има $5(2x^2 + 3)$ књига. Колико књига Миа и Лина имају заједно?

7. Игор, Сара и Нина сакупљају поштанске марке. Игор има $4x\,(x - 4)$ марке. Сара има $2x\,(8 - x)$ марке, а Нина има $8\,(7 + 2x)$ марке. Колико поштанских маркица имају деца заједно?

8. Бака Мара је у својој башти посадила парадајз, паприке и лук. Према изразима за димензије на *цртежу* 2, напиши полином у нормалном облику који ће изразити површину:

а) дела засађеног луком,
б) дела засађеног парадајзом,
в) дела засађеног паприкама,
г) целе баште.



цртеж 2

Истраживање

Дати су полиноми $A = 2x^3 + 4x$, $B = 2x^2$ и $C = -2x^3 + 4$.
а) Наћи степен полинома A, B, C, $A \cdot B$ и $B \cdot C$. Шта примећујеш?
б) Према примеру, каква је веза између степена полинома – множитеља и степена полинома – производа?
в) Изведи општи закључак о вези између степена полинома – фактора и степена полинома – производа.

6. ДЕЉЕЊЕ ПОЛИНОМА МОНОМОМ

Дељење монома

Активност

Подели степене $x^7 : x^3$.

Пример 1

Подели моном $12x^5y4z^2$ са мономом $4x^2yz$.

Записујемо количник $12x^5y4z^2 : 4x^2yz$. Дељењем сваког чиниоца од дељеника одговарајућим чиниоцем од делиоца и записивањем добијених количника као производа, добијамо
$12x^5y4z^2 : 4x^2yz = (12 : 4) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^4 : y) \cdot (z^2 : z) = 3x^3y^3z$.

Моном се дели мономом тако што се коефицијент дељеника дели са коефицијентом делиоца, а степени променљивих главне вредности делиоца се деле са степенима одговарајућих променљивих главне вредности делиоца, а затим се добијени количници записују као производ.

Пример 2

Израчунај количник монома: а) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4$, б) $-20a^3bc^2 : 4abc$, в) $-14x^3y^3 : (-7x^2y)$.

а) $\frac{2}{3}a^7 : \frac{4}{5}a^4 = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) \cdot (a^7 : a^4) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}) \cdot (a^7 : a^4) = \frac{5}{6}a^3$,

б) $-20a^3bc^2 : 4abc = (-20 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b : b) \cdot (c^2 : c) = -5a^2c$,

в) $-14x^3y^3 : (-7x^2y) = (-14 : (-7)) \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^3 : y) = 2xy^2$.

Пример 3

Количник $8a^2 : 4ax = \frac{8a^2}{4ax} = \frac{2a}{x}$ није моном јер имамо дељење са променљивом. То значи да количник монома са мономом може бити и израз који није моном.

Задатак 1

Израчунај количник монома:

а) $\frac{2}{9}a^5b^3 : \frac{1}{6}a^2b$, б) $-18a^4b^3c^2 : 6a^2b^2c$, в) $-9x^2y : (-15x^2y)$.

Пример 4

Један инжењер истражује густину материјала, која се добија дељењем масе са запремином. Маса и запремина материјала изражавају се формулама $m = \frac{9}{4}x^5y^3$ и $V = \frac{3}{2}x^2y$. Колика је густина ρ материјала, $\rho = \frac{m}{V}$ важи формула?

Ако поделимо моном $\frac{9}{4}x^5y^3$ са мономом $\frac{3}{2}x^2y$, добијамо

$\rho = \frac{9}{4}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y = (\frac{9}{4} : \frac{3}{2}) \cdot (x^5y^3 : x^2y) = (\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}) \cdot (x^5 : x^2) \cdot (y^3 : y) = \frac{3}{2}x^3y^2$..

Густина материјала износи $\rho = \frac{3}{2}x^3y^2$.

Дељење полинома мономом

Активност

Користећи десно дистрибутивно својство дељења у односу на сабирање и одузимање, поједностави израз $(6x + 4) : 2$.

Пример 5

Изврши дељење:

а) $(18x + 12y) : 6$, б) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3)$,

в) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$, г) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y$.

Применом десног дистрибутивног својства дељења у односу на сабирање и одузимање, добијамо:

а) $(18x + 12y) : 6$ Делимо сваки члан полинома са мономом.

$= 18x : 6 + 12y : 6$ Добијене количнике сабирамо.

$= 3x + 2y$, Полином сводимо на нормалан облик.

б) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : (-x^3) = 3x^5 : (-x^3) + x^4 : (-x^3) - 4x^3 : (-x^3) = -3x^2 - x + 4$,

в) $(-9a^3b^2 - 6a^2b^3 + 15a^3b^3) : (-3a^2b^2)$

$= -9a^3b^2 : (-3a^2b^2) - 6a^2b^3 : (-3a^2b^2) + 15a^3b^3 : (-3a^2b^2)$

$= 3a + 2b - 5ab$

г) $(8x^3y + 6x^2y) : 2x^3y = 8x^3y : 2x^3y + 6x^2y : 2x^3y = 4 + \frac{3}{x}$.

Добијамо израз у коме један од његових чланова, $\frac{3}{x}$ није моном. Значи, количник полинома и монома такође може бити и израз који није полином.

Полином се дели мономом тако што се сваки члан полинома дели са датим мономом а добијени количници се сабирају.

Задатак 2

Изврши дељење:

а) $(14x + 21) : 7$, б) $(27x^3y^4 - 36x^2y^3) : 9xy^3$,

в) $(4x^6 - x^4 + x^2) : (-2x^2)$, г) $(10x^2y^3 - 5x^2y^2 + 9x^3y^2) : (-15x^2y^2)$.

Пример 6

Један фармер дели површину за наводњавање на неколико једнаких делова. Укупна количина воде која треба да се подели по целој површини израчунава се полиномом $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$.

Потребно је да вода буде подједнако распоређена на сваки део површине, а сваки део је представљен мономом $\frac{3}{2}x^2y$. Колику количину воде ће сваки део примити?

Поделићемо моном $\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y$ са мономом $\frac{3}{2}x^2y$.

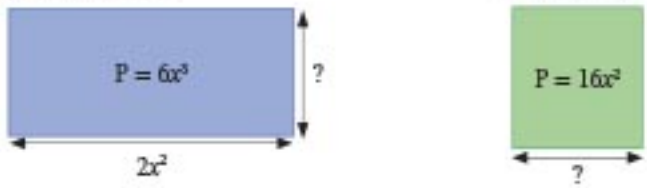
$$\left(\frac{9}{2}x^5y^3 + 3x^4y^2 - \frac{3}{4}x^3y\right) : \frac{3}{2}x^2y = \frac{9}{2}x^5y^3 : \frac{3}{2}x^2y + 3x^4y^2 : \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{4}x^3y : \frac{3}{2}x^2y$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3}x^{5-2}y^{3-1} + 3 \cdot \frac{2}{3}x^{4-2}y^{2-1} - \frac{3}{4} \cdot -x^{3-2}y^{1-1} = 3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x.$$

Сваки део површине ће примити количину воде изражену полиномом $3x^3y^2 + 2x^2y - \frac{1}{2}x$.

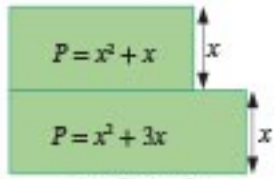
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај количник монома: задачи:
   а) $-8x^4y^3 : (-20x^2y)$, б) $\frac{3}{5}a^5b : \frac{3}{10}a^3b$, в) $\frac{3}{7}a^4b^3c^2 : (-\frac{5}{14}abc)$.
2. Изврши дељење:
   а) $(32a - 24b) : (-8)$, б) $(9x^2y + 12x^4y^2) : 3x^3y$,
   в) $(3x^5 + x^4 - 4x^3) : x^3$, г) $(14a^4 - 7a^3 + 24a^2) : (-21a^2)$.
3. Подели збир монома $6a^4b^5$ и $9a^4b^5$ са мономом $-5ab^2$.
4. Подели разлику монома $8xy^2$ и $6xy^2$ са њиховим збиром.
5. Напиши моном у нормалном облику који изражава страницу (*цртеж* 1):
   а) правоугоник б) квадрат

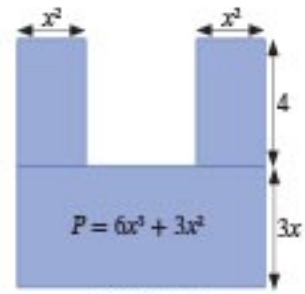


цртеж 1

6. Напиши полином у нормалном облику, који ће изразити обим сваког од облика на *цртежу* 2 и на *цртежу* 3.



цртеж 2



цртеж 3

7. ПОЈЕДНОСТАВЉИВАЊЕ ЦЕЛИХ РАЦИОНАЛНИХ ИЗРАЗА

Активност

Поједностави израз: а) $2c(a + 1)$, б) $3a(b - c) - 5$.
Шта представљају изрази које си добио/ла након поједностављивања сваког од датих израза?

Изрази у којима су константе и променљиве повезане са операцијама сабирања, одузимања, множења и степеновања са ненегативним целобројним експонентом називају се **цели рационални изрази.**

У складу са дефиницијом, цео рационални израз **не садржи дељење са променљивом**. После поједностављења (извршавања наведених операција и ослобађања од заграда), цео рационални израз претвара се у полином. То значи да је **сваки полином цео рационални израз.**

Цели рационални изрази су, на пример, изрази $-3x^2+2x+5$, $(a+1)(a-2)+4$, $\frac{3c^2-2}{6}$ итн. Као и код полинома (монома), сматраћемо да су константе у целом рационалном изразу рационални бројеви и да променљиве узимају вредности у скупу рационалних бројева. Зато, за поједностављивање целог рационалног израза, важе иста правила редоследа за извршавање операција и ослобађање од заграда као и код рационалних бројева. Даље, реч „израз" ће значити „цео рационални израз".

Пример 1

Поједностави израз $-(4ab+6a-7b)+(-ab-2a+3b)-(-ab+2a+3b)$.

$-(4ab+6a-7b)+(-ab-2a+3b)-(-ab+2a+3b)$ — Ослобађамо се заграда.
$=-4ab-6a+7b-ab-2a+3b+ab-2a-3b$ — Сводимо на сличне мономе.
$=-\underline{4ab}-\underline{\underline{6a}}+\underline{\underline{\underline{7b}}}-\underline{ab}-\underline{\underline{2a}}+\underline{\underline{\underline{3b}}}+\underline{ab}-\underline{\underline{2a}}-\underline{\underline{\underline{3b}}}$ — Подређујемо чланове
$=-4ab-10a+7b.$ — добијеног полинома.

Задатак 1

Поједностави израз:
а) $10x-6y+(3x-5y)-(-4y-2x)$,
б) $-(-a^2b+3ab^2)-(7a^2-ab^2+2b+2a^2b)$.

Пример 2

Поједностави израз: $-5y(x^3-y)-x^3(2-y)$.

$-5y(x^3-y)-x^3(2-y)$ — Ослобађамо се заграда применом
$=-5yx^3+5y^2-2x^3+x^3y$ — дистрибутивног својства.
$=\underline{-5yx^3}+5y^2-2x^3+\underline{x^3y}$ — Сводимо сличне мономе.
$=-4yx^3+5y^2-2x^3.$

Задатак 2

Поједностави израз:
а) $9y-2(3x+5y)+4x-xy$,
б) $(x^2-0{,}4x^2y)\cdot 5x-0{,}5y\cdot(y^2-6x^2y)$.

Пример 3

Поједностави израз:
$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$.

$2a + 3a \cdot (a - 1) + (28a^2 - 35b^2) : (-7)$
$= 2a + 3a^2 - 3a - 4a^2 + 5b^2$
$= \underline{2a} + \underline{\underline{3a^2}} - \underline{3a} - \underline{\underline{4a^2}} + 5b^2$
$= -a^2 - a + 5b^2$

Задатак 3

Поједностави израз:
а) $(4x^2y + x^2y^2 + 6xy^2) : 2 + x(xy - y^2)$, б) $(3a^2 + 6a - 9b) : 3 + (-28b) : (-4) + 2a$.

Пример 4

Поједностави израз:
$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\,\}$

$8a - \{2b \cdot (4a + 3b) - [\, 2a - 3a \cdot (5b + a)\,] - 4b^2\,\}$	Ослобађамо се малих заграда множењем.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - [\, 2a - 15ab - 3a^2\,] - 4b^2\,\}$	Ослобађамо се средних заграда.
$= 8a - \{8ab + 6b^2 - 2a + 15ab + 3a^2 - 4b^2\,\}$	Ослобађамо се великих заграда.
$= 8a - 8ab - 6b^2 + 2a - 15ab - 3a^2 + 4b^2$	Групишемо сличне мономе.
$= \underline{8a} - \underline{\underline{8ab}} - \underline{\underline{6b^2}} + \underline{2a} - \underline{15ab} - 3a^2 + \underline{\underline{4b^2}}$	Поједностављујемо полином.
$= -3a^2 + 10a - 23ab - 2b^2$	

Задатак 4

Поједностави израз:
а) $-\{\, 9x - [\, 4y \cdot (6 - x) - x \cdot (2 + 3y)\,] + (x - 3) \cdot 8y\,\}$, б) $0{,}2xy - \{\, 0{,}3y^2 + [0{,}5y + 0{,}2y \cdot (3x - 5y)]\}$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Поједностави израз:
   а) $a + b - 3 - a + 2a + 5b + 4$, б) $(3x^2 - 8) - (7x + 2) - (-x^2 - 6) - 2x + 5$.
2. Дати су полиноми $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 5x^2 + 2x - 3$ и $C = 4x^2 + 3x$.
   Наћи полиноме: a) A + C + C, b) C − A, c) C − A − C, d) A − C.
3. Поједностави израз: а) $4a\,(a + b - 2)$, б) $-3a^2\,(5 - b) - 4b\,(2a^2 - 1) - 3(b - a^2)$.
4. Поједностави израз:
   а) $2x^2 + x\,(4x - 1)$, б) $2x^3\,(3x^2 - 1) - 4x\,(x^2 + 1)$,
   в) $5xy^2 + 3y\,(x + xy - y) - 4xy$, г) $2x\,(x - y^2) + 7y + 4\,(x^2 + y) - 3xy$.

5. Поједностави израз:
   а) $5x^2 + (9x^4 - 6x^3 + 3x^2) : (-3) + 2x^3$, б) $(y^2 - 4y) \cdot (-y) + 8y^3 : (-2)$.

6. Поједностави израз:
   а) $2x^2 + x(x^2 - 3x + 1) + (5x^3 + 4x^2) : (-2) + 5$, б) $x(x + 3) + 2(x^2 + 2x + 1) - (x - 1) \cdot x$.

7. Поједноста израз:
   а) $3x(4x^3y - xy + 1) - x(xy + 2)$, б) $(3y^2 - 6x^2y + 12xy) : 3 + y(4x - 2y)$,
   в) $2x(x2y - 2xy + 1) + 2y \cdot (3x^3 - 5y) - x^2y$.

8. Поједностави израз: задача
   а) $6x^2 + 3x(5x - 2)$, б) $2x(3x^2 - 1) - 4(x + 1)$,
   в) $6xy^2 + 5y(x + xy - 2y) - 7xy$, г) $2x(3x - y) + 9y + 7(x^2 + y) - 5xy$,
   д) $-3x(x^2 - 2y + 1) - 5y(-x + 4)$, ђ) $2x(x + 5y) + y(5x - 7y) - x^2(x - 3)$,
   е) $2a(b - 4) - b(2a - 3) + ab(5a - 1)$.

9. Поједностави израз: задачи
   а) $\{x^2 - [4x - x \cdot (2x + 3)] + (3x - 2) \cdot x\}$, б) $0{,}3y^2 - \{0{,}5xy^2 + [0{,}8y + (3x - 4) \cdot 0{,}5y^2]\}$.

8. ЗАМЕНА ПРОМЕНЉИВИХ ЦЕЛИМ БРОЈЕВИМА У ЦЕЛИМ РАЦИОНАЛНИМ ИЗРАЗИМА И У ФОРМУЛАМА

Активност

Како ћеш израчунати обим правоугаоника користећи формулу $L = 2(a + b)$, ако су странице $a = 3$ cm и $b = 2$ cm?

Ако заменимо промењљиве у **целом рационалном изразу** заменимо бројевима, онда цео рационални израз постаје нумерички израз и можемо да израчунамо његову вредност.

Пример 1

Израчунај нумеричку вредност израза $2x + 5$, за $x = 3$.

$2x + 5$
$= 2 \cdot 3 + 5$ Променљиву x заменимо датом вредношћу 3.
$= 11$ Израчунамо бројну вредност добијеног израза.

Пример 2

Израчунај бројну вредност израза $2x^2 + 3y - 1$ за $x = 3$ и $y = -4$.

На место променљивих x и y, замењујемо одговарајуће дате вредности
$2x^2 + 3y - 1 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot (-4) - 1 = 18 - 12 - 1 = 5.$
Нумеричка вредност израза за $x = 3$ и $y = -4$ износи 5.

Пример 3

Ако је $x = -1, y = 3$ и $z = -2$, израчунај вредност израза:

а) $3x^4 + y^2 + 5z^3$, б) $4(5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$.

а) $3x^4 + y^2 + 5z^3$
$= 3 \cdot (-1)^4 + 3^2 + 5 \cdot (-2)^3$
$= 3 + 9 - 40$
$= -28$

б) $4 \cdot (5x^3 - \frac{y^2}{3} - z)$
$= 4 \cdot (5 \cdot (-1)^3 - \frac{3^2}{3} - (-2))$
$= 4 \cdot (-5 - 3 + 2)$
$= 4 \cdot (-6)$
$= -24$

Скенирај код и реши задатке

Задатак 1

Ако је $x = 2, y = -3$, z = 4, израчунај вредност израза:

а) $4x^2 + y^3 - 3z$, б) $5x - 2y - 3z$, в) $x^4 : (-2x^2) - y^3 + 2z^2$, г) $\frac{3x^2 + 2y}{6} - \frac{z^2}{8}$.

Подсетимо се да је **формула** исказ који изражава везу између неколико величина (променљивих) и према коме израчунавамо једну од њих.
Замена у формули је поступак помоћу којег на место променљивих у формули записујемо дате вредности за променљиве.

Пример 4

Израчунај обим L једнакокраког троугла користећи формулу $L = a + 2b$, ако је основа $a = 3$ cm и страница $b = 5$ cm.

$L = a + 2b$
$L = 3 + 2 \cdot 5$ — У формули замењујемо дате вредности за странице.
$L = 13$ cm — Израчунавамо бројну вредност добијеног бројног израза.

Задатак 2

Пут који пређе аутомобил израчунава се формулом $s = v \cdot t$, где је v брзина у km/h, а t време у сатима. Колики ће пут аутомобил прећи ако је:
а) $v = 60$ km/h и $t = 2$ h, б) $v = 80$ km/h и $t = 3$ h?

Пример 5

Наћи вредност странице a правоугаоника са обимом $L = 46$ cm, ако је $b = 5$ cm.

У формули за обим правоугаоника $L = 2(a + b)$ замењујемо познате вредности $L = 46$ cm и $b = 5$ cm и решавамо једначину са једном непознатом:
$46 = 2(a + 5)$
$23 = a + 5$
$a = 18$ cm

Пример 6

Израчунај вредност u у формули $v = u + at$, ако је $v = 35$, $a = -2$ и $t = 14$.

Заменом датих вредности за промењиве у формули добијамо
$v = u + at$
$35 = u + (-2) \cdot 14$
$35 = u - 28$
$u = 35 + 28$
$u = 63$

Примећујемо да у неким случајевима, заменом у датој формули, добијамо једначину коју треба решити.

Задатак 3

Дата је формула $y = 5x - 2$. Наћи вредност x, ако је: а) $y = 18$, б) $y = 33$,в) $y = 0$.

Пример 7

Цена C карата за групну посету биоскопу израчунава се по формули $C = 120a + 80b + 20c$, где је a број одраслих, b је број деце и c је број особа са посебним попустом.
а) Израчунај цену карата ако група има 10 одраслих, 4 деце и 2 особе са посебним попустом.
б) Ако група има 1580 денара за карте, а потребно је да уђу 4 деце и 3 особе са посебним попустом, колико карата за одрасле може да се купи?

а) Заменом датих вредности за променљивие у формули, добијамо

$C = 120a + 80b + 20c = 120 \cdot 10 + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 1560$ денара

б) Заменом датих вредности за цену и број људи у формули

$C = 120a + 80b + 20c$ добијамо једначину

$120a + 80 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 1580$

$120a + 320 + 60 = 1580$

$120a = 1580 - 380$

$120a = 1200$

$a = 10$

Може се купити 10 карата за одрасле.

Задатак 4

Мајстор Киро наплаћује фарбање станова по формули $C = 100x + 80y + 250$, где је x површина коју треба офарбати, y је количина боје у килограмима која ће се користити, а 250 денара су трошкови његовог доласка.

а) Израчунај цену коју треба платити ако је за фарбање стана површине 85 m2 потребно 5 kg боје.

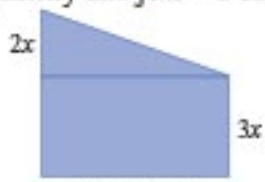
б) Бојан је за његов стан површине 40 m2 платио мајстору 6740 денара. Колико килограма боје је мајстор потрошио за Бојанов стан?

Задатак 5

Напиши формулу за површину сваког од облика на *цртежу* 1 и *цртежу* 2, поједноставите је, а затим израчунајте површину ако је x = 3 cm



цртеж 1



цртеж 2

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Ако је $x = -6$, израчунајте вредност израза: а) $2x^2 + 5$, б) $-3(x^2 - 4)$.
2. Ако је $x = -2$, $y = 4$, израчунај вредност израза: а) $x^3 - y + 5$, б) $2x^2 - y^2 + 3$.
3. Ако је $x = 4$, $y = 1$, $z = -2$ израчунај вредност израза: а) $x^2 - 5y + z^4$, б) $4(x + y) - z^2$.
4. Ако је $x = 3$, $y = -1$, $z = 2$ израчунај вредност израза:
   а) $4(2x^2 - y^2) + 2(z^3 + 1)$, б) $3(x^3 + 2) - 2yz$.
5. Ако је $x = -3$ и $y = 2$, израчунај вредност израза:
   а) $4(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$,
   б) $2(xy2 - 4) + 3x2y + 7(x + y) - 5xy$

6. Ако је $a = -2$ и $b = 4$, израчунај вредност израза:
а) $-(ab - 3) + 2a - (-4a^3 + 2b - 5)$, б) $2b - (3ab - 9) - (-2a^2 + b^2 - 1)$.

7. Израчунај вредност t из формуле $v = u + at$, ако је $u = -5$, $a = 3$ и $v = 4$

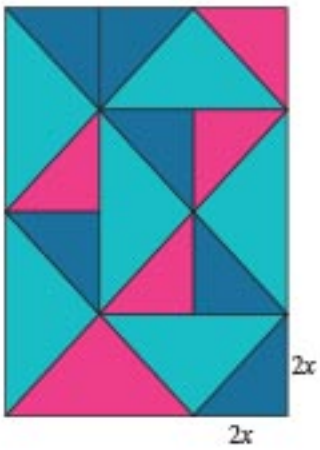
8. Нађи вредност x из формуле $y = -2x + 7$, ако је: а) $y = 3$, б) $y = -3$.

9. Нађи вредност y из формуле $z = xy + 2$, ако је: а) $z = 26$ и $x = 3$, б) $z = -40$ и $x = 6$.

10. Формула за укупну масу M у дециграмима смутија је $M = 2x^2y + 3xy + 4z$, где је x број банана, y је број јабука, а z је број поморанџи.
а) Израчунај масу M смутија направљеног од 3 банане, 2 јабуке и 5 поморанџи.
б) Колико јабука Јована треба да стави, ако стави 2 банане и 5 поморанџи, и жели да добије укупно 62 декаграма смутија?

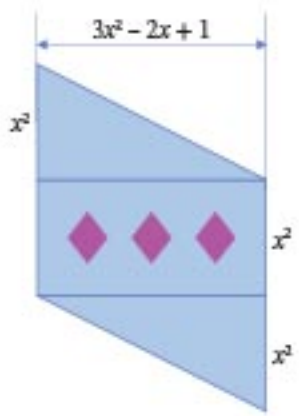
11. Запиши формулу за површину тепиха, поједностави је, а затим израчунај површину ако је $x = 2$ dm. (*цртеж* 3 и *цртеж* 4)

а)



цртеж 3

б)



цртеж 4

Истраживање

Дат је израз $4x^2$.

а) Израчунај вредност израза за $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

б) Нацртај и допуни табелу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Вредност израза							

в) За коју вредност x израз има најмању вредност?

г) У ком делу табеле вредности опадају, а у ком се повећавају?

д) Забележите вредности за: $x = -3$ и $x = 3$, $x = -2$ и $x = 2$, $x = -1$ и $x = 1$.
Да ли постоји „симетрија“ у резултујућим бројевима? Објасните својим речима.

ђ) Објасни како се вредност израза мења, повећава или смањује:
- када x расте од -3 до 0,
- када x расте од 0 до 3?

9. САСТАВЉАЊЕ И РЕШАВАЊЕ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Линеарна једначина

Активност

Разгледај једначине: $3x-7=2$, $-\frac{1}{3}a+2=0$ и $2(y-1)=4$.
а) Колико непознатих има свака једначина? б) Колики је степен променљиве?
в) Који бројеви су коефицијенти једначине?

- Једначина облика
  $ax+b=c$, где су a и b рационални бројеви и $a\neq 0$
  назива се линеарна једначина са једном непознатом.
- Решење линеарне једначине са једном непознатом је било који рационалан број за који једначина постаје тачна бројна једначина.

Увидели смо да свака једначина која се може свести на облик горе поменуте линеарне једначине са једном непознатом треба да се сматра линеарном једначином са једном непознатом.
Осим тога, уместо линеарне једначине са једном непознатом, рећи ћемо линеарна једначина или само једначина.
Линеарне једначине су, на пример, једначине $2x-4=7$, $-3(z+1)=z+1$, $-\frac{1}{3}x-4=3x$, итн.
У поступку решавања једначина, применићемо модел који укључује употребу симбола за променљиве и константе. Симболи су правоугаоници и квадрати који, према својој боји и облику, имају вредност као у табели: x

симбол				
вредност	x	$-x$	1	-1

Једначину састављамо сабирањем симбола који се налазе на истој страни од знака = .

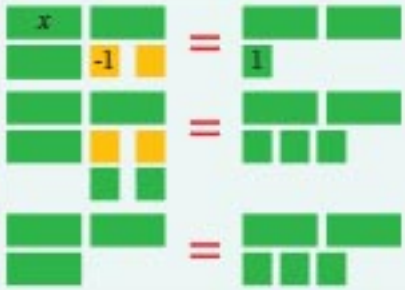
Пример 1

Према моделу на *цртежу* 1, састави једначину и реши је.



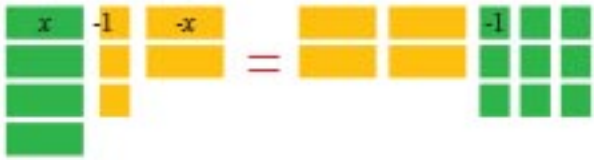
цртеж 1

Према моделу, обе стране једначине записујемо сабирањем одговарајућих симбола.

	/+  Додавањем два зелена квадрата са обе стране елиминишемо жуте квадрате са леве стране.	$3x-2=2x+1$ $3x-2=2x+1\ /+2$ $3x-2+2=2x+1+2$ $3x=2x+3$
	/+  Додавањем два жута правоугаоника са обе стране елиминишемо зелене правоугаонике са десне стране.	$3x=2x+3\ /-2x$ $3x-2x=2x+3-2x$
	Добијамо решење за 	$x=3$

Задатак 1

Према моделу на *цртежу* 2, састави једначину и реши је.



цртеж 2

Алгебарски поступак за решавање једначина

Из поступка решавања једначине по датом моделу, си сигурно приметио следећа правила за решавање једначине:

- Ако се исти број или израз дода или одузме са леве и десне стране дате једначине, добија се једначина која ће имати исто решење као и дата једначина.
- Ако се лева и десна страна једначине помноже или поделе бројем који није 0, добија се једначина која ће имати исто решење као и дата једначина.

Применом ових правила, комутативног и асоцијативног својства сабирања, као и дистрибутивног својства множења у односу на сабирање и одузимање, можемо добити **алгебарски поступак** за решавање било које једначине.

Скенирај код и реши једначине.

Пример 2

Реши једначину: а) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, б) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1$, в) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2$.

а) $2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ Множимо обе стране једначине са НЗС (3, 6) = 6

$2x+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}/\cdot 6$ да би се ослободили именилаца.

$12x+1=4/-1$ Одузимамо 1 од обе стране једначине тако да само члан x остане на једној страни.

$12x=3/:12$ Делимо обе стране са 12 да би добили решење.

$x=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

Провери: $2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

б) $\frac{x}{2}-\frac{2x}{9}=1/\cdot 18$ Делимо обе стране са 12 да би добили решење.

$18\cdot\frac{x}{2}-18\cdot\frac{2x}{9}=18\cdot 1$

$9x-4x=18$ Сводимо сличне чланове.

$5x=18/:5$ Делимо обе стране са 5.

$x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$

Провери: $\frac{3\frac{3}{5}}{2}-\frac{2\cdot 3\frac{3}{5}}{9}=1$.

в) $\frac{3x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2/\cdot 12$ Множимо обе стране једначине са НЗС (4, 6) = 12.

$\frac{3x}{4}\cdot 12+1\cdot 12=\frac{5x}{6}\cdot 12-2\cdot 12$

$3\cdot 3x+12=2\cdot 5x-24$

$9x+12=10x-24/-10x$ Одузимамо $10x$ са обе стране једначине да бисмо елиминисали члан x на десној страни.

$-x+12=-24/-12$

$-x=-36/:(-1)$

$x=36$

Провери: $\frac{3\cdot 36}{4}+1=\frac{5\cdot 36}{6}-2$.

Задатак 2

Реши једначину: а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$, б) $\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{8x}{5}+1\frac{1}{4}$.

Пример 3

Реши једначину: а) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$, б) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$.

а) $\frac{x}{5}-1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(7-\frac{3x}{5})$ Ослобађамо се заграда.

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}$ НЗС(5, 2, 4, 20) = 20

$\frac{x}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3x}{20}\ /\cdot 20$

$4x-30=-35+3x\ /-3x$

$x-30=-35\ /+30$

$x=-5$

Провери: $\frac{-5}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{7}{4}+\frac{3(-5)}{20}$.

б) $1{,}2x+4{,}5=-3(0{,}8x-1{,}5)$

$1{,}2x+4{,}5=-2{,}4x+4{,}5\ /-4{,}5$

$1{,}2x=-2{,}4x\ /+2{,}4x$

$3{,}6x=0\ /:3{,}6$

$x=0$

Проверка:
$1{,}2\cdot 0+4{,}5=-3\cdot(0{,}8\cdot 0-1{,}5)$.

Задатак 3

Реши једначину: а) $\frac{x}{2}-(0{,}15+\frac{x}{3})=0{,}25$, б) $2{,}3x-3(0{,}7x+0{,}5)=-4{,}5$.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Према моделу на *цртежу* 3, састави једначину и реши је.



цртеж 3

Решите једначине од задатка 2 до задатка 9.

2. а) $2x-\frac{x}{2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$, б) $x-\frac{2}{3}=\frac{x}{6}+\frac{1}{2}$, в) $\frac{3x-1}{9}=\frac{1}{6}+6$.

3. а) $\frac{2x}{5}-\frac{x}{2}=x-\frac{1}{10}$, б) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-5=2$, в) $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}$.

4. а) $\frac{2x}{3}-3{,}5=\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$, б) $0{,}4(x-1)+0{,}6-\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$, в) $x-\frac{1}{3}(x+2)-0{,}5=-\frac{x}{6}+5$.

5. а) $\frac{x-1}{4}=-\frac{x}{3}$, б) $\frac{2x}{3}+1=2x+\frac{1}{3}$.

6. а) $0{,}8x-2{,}4=0{,}6(x+1)$, б) $2{,}5(3x+1)=0{,}5(2x+3)$.

7. а) $\frac{x-4}{3}+\frac{x}{2}=\frac{x}{6}$, б) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{10}=\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$, в) $\frac{2x}{3}-9=\frac{4x}{9}-7$, г) $\frac{3x-1}{10}=\frac{x+1}{2}$.

8. а) $\frac{5}{18}(x-1)+\frac{1}{4}=-\frac{x}{2}$, б) $4(x-\frac{1}{4})-3(\frac{1}{3}+x)=2x-7$.

9. а) $\frac{5x}{3}-\frac{1}{6}-1{,}5x-\frac{3}{8}=\frac{11}{12}$, б) $\frac{4}{3}-0{,}75\cdot(2x-5)=\frac{5}{6}x$.

Истраживање

Ученици Ана, Борис и Ердал решавали су линеарне једначине са рационалним коефицијентима. Свако од њих је направио грешку на другом месту у решењу. Пронађи грешке и реши једначине исправно.

Ана	Борис	Ердал
$\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}x+2$	$\frac{2}{3}(x-3)=\frac{1}{2}x+1$	$\frac{3}{4}x-2=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x=2-5$	$\frac{2}{3}x-3=\frac{1}{2}x+1$	$12\cdot\frac{3}{4}x-2=12\cdot\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}x=-3$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=1+3$	$9x-2=4x+\frac{1}{2}$
$x=-12$	$\frac{1}{6}x=4$	$9x-4x=\frac{1}{2}+2$
	$x=24$	$5x=\frac{5}{2}$
		$x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

10. ПРИМЕНА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Састављање и решавање једначине за дати текстуални задатак

Једначине омогућавају решавање текстуалних задатака тако што се непознате величине повезују са датим величинама.

Активност

Један број је за 7 већи од другог броја. Збир два броја је 31.

а) Који је мањи број?

б) Колика је разлика између два броја?

в) Који је резултат ако се збир бројева одузме од броја 7? Објасни свој одговор.

Пример 1

Ева је замислила број. Помножила га је са 4, затим одузела 3 и тако добила број који је за 0,6 већи од броја који је замислила. Који је број који је Ева замислила?

Број који је Ева замислила означићемо са x.
Према условима задатка, састављамо линеарну једначину:



Решавамо једначину:

$4x - 3 = x + 0,6$
$4x - 3 = x + 0,6 \;/\; -x$
$3x - 3 = 0,6 \;/\; + 3$
$3x = 3,6 \;/\; : 3$
$x = 1,2$

Провери: $4 \cdot 1,2 - 3 = 1,2 + 0,6$.

Ева је замислила број 1,2.

Задатак 1

Цена оловке је $\frac{2}{5}$ од цене гумице. Оловка и гумица заједно коштају 40 денара. Колико кошта гумица, а колико кошта оловка?

Скенирај код и састави изразе.

Пример 2

Првог дана тродневне екскурзије, Нина је потрошила $\frac{1}{4}$ од новца који је понела.

Другог дана је потрошила 200 денара, тако да јој је трећег дана остало $\frac{2}{3}$ од почетног износа. Колико новца је Нина понела на екскурзију?

Означимо са x износ који је Нина понела на екскурзију.

Према условима задатка:

- првог дана је потрошила $\frac{1}{4}x$ денара
- другог 200 денара
- трећег дана је имала $\frac{2}{3}x$ денара.

Њихов збир је почетни износ који је Нина понела, па решавамо једначину:

$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x$
$\frac{1}{4}x + 200 + \frac{2}{3}x = x \;/\; \cdot 12$
$3x + 2400 + 8x = 12x$

$11x + 2400 = 12x \,/ -12x$
$11x - 12x + 2400 = 12x - 12x$
$-x + 2400 = 0 \,/ -2400$
$-x + 2400 - 2400 = 0 - 2400$
$-x = -2400 \,/ \cdot (-1)$
$x = 2400$ Провери: $\frac{1}{4} \cdot 2400 + 200 + \frac{2}{3} \cdot 2400 = 2400$
Нина је понела 2400 денара на екскурзију.

Задатак 2

Дарја је потрошила $\frac{3}{7}$ новца који је имала за свеске, $\frac{5}{14}$ новца за оловке и 150 денара за блок за цртање. Колико је новца Дарја имала?

Пример 3

Алма и Нела су кренуле у куповину са исток количином новца. Након што је Алма потрошила 400 денара и позајмила Нели 400 денара, $\frac{3}{4}$ од Алминог тренутног износа је било једнако $\frac{1}{2}$ Нелиног тренутног износа. По колико су новца Алма и Нела имале када су отишле у куповину?

Почетни износ који је свака од девојчица имала означићемо са x.
После потрошених 400 и позајмљених 400 денара:
Алма је имала $x - 800$ денара.
Нела је имала $x + 400$ денара.
У том тренутку, према услову задатка, за новац који је имала свака од њих важи следећа једначина:

$$\frac{3}{4} \cdot (x - 800) = \frac{1}{2} \cdot (x + 400).$$

Решавамо добијену једначину:

$$\frac{3}{4}(x - 800) = \frac{1}{2}(x + 400) \,/ \cdot 4$$
$$3(x - 800) = 2(x + 400)$$
$$3x - 2400 = 2x + 800$$
$$3x - 2x = 2400 + 800$$
$x = 3200$ Провера: $\frac{3}{4} \cdot (3200 - 800) = \frac{1}{2} \cdot (3200 + 400)$
Када су Алма и Нела кренуле у куповину, свака је имала по 3200 денара.

Задтак 3

Виктор и Мартин су имали исту количину новца. Након што је Виктор дао Мартину 600 денара, $\frac{2}{3}$ од Викторовог тренутног износа је било једнако $\frac{1}{2}$ Мартиновог тренутног износа. По колико су новца Виктор и Мартин имали на почетку?

Састављање текстуалних задатака за дату једначину

Пример 4

Састави текстуални задатак према једначини:

а) $2x + 35 = 49$, б) $x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.

Реши једначину и објасни решење у вези датог текста.

За дату једначину може се саставити неколико текстуалних задатака.

а) Текстуални задатак у вези са дате једначине може да гласи:

Теа је двоструко старија од своје сестре и 35 година млађа од своје мајке, која има 49 година. Колико година има Теина сестра?

Према услову у задатку, долазимо до дате једначине $2x + 35 = 49$.

Решавамо једначину:

$2x + 35 = 49$

$2x = 49 - 35$

$2x = 14$

$x = 7$ Провера: $2 \cdot 7 + 35 = 49$

Добили смо број којим заиста можемо изразити године детета. То значи да смо правилно саставили задатак.

б) У датој једначини видимо да је непозната x целина од које се одузимају делови $\frac{1}{5}x$, $\frac{1}{3}x$ и број 110, после чега остаје $\frac{1}{10}$ од почетне целине x.

Можемо да претпоставимо да је број x нека количина новца, па формулишимо следећи текстуални задатак:

Од новца који је имао са собом, Диме је потрошио $\frac{1}{5}$ денара за свеске, $\frac{1}{3}$ за оловке, 110 денара за фломастере, и остала му је $\frac{1}{10}$ од новца. Колико новца је имао Диме?

Према услову у задатку, долазимо тачно до једначине

$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x$.

Решавамо једначину:

$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}x-110=\frac{1}{10}x \;/\cdot 30$

$30x - 6x - 10x - 3300 = 3x$

$11x = 3300$

$x = 300$ Провера: $300-\frac{1}{5}\cdot 300-\frac{1}{3}\cdot 300-110=\frac{1}{10}\cdot 300$

Добили смо резултат који заиста може изразити неку количину новца, што значи да смо саставили одговарајући задатак.

Задатак 4

Састави текстуални задатак на основу једначине $x-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x-60=\frac{2}{5}x$.

Реши једначину и објасни решење у контексту датог текста.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Збир половине, трећине и четвртине броја x је за 2 већи од самог броја. Наћи број x.

2. Гоце и Миле су радили у башти. Гоце је радио $\frac{3}{4}$ од времена које је Миле радио. Колико је сати свако од њих радио ако су радили 7 сати укупно?

3. Одељење 8-А има једног ученика више од одељења 8-Б. Једног дана у 8-А $\frac{1}{5}$ ученика је било одсутно, а у 8-Б $\frac{1}{6}$ ученика је било одсутно, и тог дана је у оба одељења био исти број ученика. Колико ученика учи у одељењу 8-Б?

4. У једној школи $\frac{7}{8}$ ученика учи енглески, а остали уче немачки језик. Енглески језик учи 420 више ученика него немачки. Колико укупно ученика има школа?

5. Сваки ученик 8-А разреда је члан тачно једне секције. $\frac{1}{6}$ ученика чланује у биолошкој секцији, $\frac{2}{5}$ ученика су чланови литературне секције, а 3 ученика су чланови математичке секције. Колико ученика има у 8-А разреду?

6. Четвртина угла α и трећина угла који је за $60°$ већи од α имају збир $62°$. Наћи угао α.

7. Трећина угла α је $44°$ мања од угла који је три пута већи од α. Наћи угао α.

8. Лена и Петар заједно имају 117 година. Лена има $\frac{4}{5}$ од Петрових година. Колико година има Петар?

9. Син има једну четвртину мајчиних година, а ћерка једну половину синовљевих година. Мајка и ћерка заједно имају 54 године. Колико година имају оба детета заједно?

10. Да би се одржала приредба у фискултурној сали, узете су столице из неких учионица. Од укупног броја узетих столица, $\frac{1}{5}$ је из кабинета за хемију, $\frac{1}{6}$ је из кабинета за физику, $\frac{2}{15}$ је из кабинета за историју и 20 слилица из кабинета за метематику. Колико укупно столица је однето у фискултурну салу?

11. а) Орхан је имао 4000 денара. Када је купио 5 пакета млека, остало му је 720 денара. Колико кошта један пакет млека?

б) Атлетичар је на тренингу истрчао 3850 метара, што износи 9 кругa и 250 метара. Колико метара је дужина једног круга?

12. Састави текстуални задатак према једначини: а) $2500 - 3x = 550$, б) $3x + 56 = 177$.

Истраживање

Замисли број, удвостручи га, додај 2, подели резултат са 2 и одузми 1.
Добио си замишљени број.
Користећи једначину, објасни зашто увек добијаш замишљени број.

11. НИЗОВИ БРОЈЕВА И ОБЛИКА

Активност

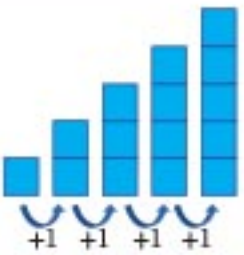
Колико квадрата има следећи члан низа? Које правило користиш за одређивање следећег члана?

Напиши првих десет чланова као нумерички низ. , ...

Сваки низ се састоји од објеката поређаних по реду, према неком правилу.
Објекти низа називају се **чланови низа**.

Пример 1

За облике на *цртежу* 1, примећујемо да сваки следећи правоугаоник има један квадратић више од претходног правоугаоника.
Правило за одређивање следећег члана је „додај 1".



цртеж 1

Пример 2

Разгледајмо бројни низ дат реченицом: „Сваки следећи члан једнак је збиру претходна два члана". Да ли се овом реченицом у потпуности одређује низ?

Одговор је не, јер треба да знамо први и други члан. Трећи члан је већ збир првог и другог члана, четврти члан је збир другог и трећег члана, итд.
У овом случају, низ ће бити потпуно одређен, на пример, реченицом „Први члан је један, други члан је један, а сваки следећи члан је збир претходна два члана".
Одређени низ је 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Први члан је 1, други члан је 1, а правило за одређивање следећег члана је „сваки члан је збир претходна два".

Правило за одређивање следећег члана низа је начин на који се добија сваки следећи члан из претходних чланова низа.

Низ је потпуно одређен са **првих неколико чланова** и **правилом за одређивање следећег члана.**

Пример 3

Запиши првих 6 чланова низа са првим чланом 4 и правилом за одређивање следећег члана „додај 5".

Првих 6 чланова низа су: 4, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19, 19 + 5 = 24, 24 + 5 = 29.

Пример 4

Дат је низ 2, 6, 10, 14, 18, ...
а) Пронађи правило којим се добија сваки следећи члан низа.
б) Напиши следећа три члана низа.

а) Примећујемо да је сваки следећи члан за 4 већи од претходног. Зато је правило за одређивање следећег члана „додај 4".



б) Следећа три члана низа су: $18 + 4 = 22$, $22 + 4 = 26$, $26 + 4 = 30$.

Пример 5

Дата су прва 4 члана низа од облика са круговима (*цртеж* 2). Пронађи правило за одређивање следећег члана и одреди број кругова у следећем облику у низу.

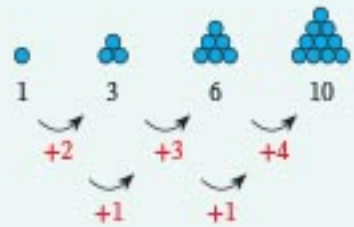


цртеж 2

Прва 4 члана низа су 1, 3, 6 и 10 (*цртеж* 3).

Правило за одређивање следећег члана гласи:
„додај разлику претходна два члана увећану за 1".
Према овом правилу, следећи облик ће имати

$10 + (10 - 6 + 1) = 10 + 5 = 15$ кругова.



цртеж 3

Задатак 1

Дат је низ 3, 9, 15, 21, ...
а) Пронађи правило за одређивање следећег члана.
б) Запиши следећа 3 члана низа.
в) Запиши десети члан низа.

Скенирај код и одреди низ.

Са правилом за одређивање следећег члана, често имамо потешкоћа у проналажењу чланова низа који имају веће редне бројеве. Зато су низови често дати зависношћу члана од његовог редног броја. Ова зависност је дата алгебарским изразом.

Алгебарски израз који даје зависност било ког члана низа од његовог редног броја назива се **правило општег члана низа**.

Ако је општи члан познат, онда се било који члан датог низа може лако пронаћи.

Пример 6

Дат је низ са општим чланом $2n + 3$. Наћи:
а) првих 5 чланова, б) чланове са редним бројевима 100 и 300.

а) Ако у изразу за општи члан низа $2n + 3$ заменимо редне бројеве првих пет чланова, 1, 2, 3, 4 и 5, добијамо
$2 \cdot 1 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 + 3 = 7$, $2 \cdot 3 + 3 = 9$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $2 \cdot 5 + 3 = 13$
Дакле, првих 5 чланова низа су: 5, 7, 9, 11 и 13.

б) Да би се одредили стоти и тристоти члан у низу, у изразу за општим чланом $2n + 3$ замењујемо $n = 100$ и $n = 300$. Тако добијамо
$2n + 3 = 2 \cdot 100 + 3 = 203$, $2n + 3 = 2 \cdot 300 + 3 = 603$.
Значи, стоти члан је 203, а тристоти члан је 603.

Задатак 2

Дат је низ са оптим чланом $4n - 1$. Наћи:
а) прва 3 члана, б) чланове са редним бројевима 50 и 200.
Ако је познат општи члан низа, можемо проверити да ли је неки број члан тог низа.

Пример 7

Дат је низ са општим чланом $3n + 4$. Да ли његови чланови могу бити бројеви:
а) 30, б) 49?

а) Да би одговорили на ово питање, потребно је да решимо једначину $3n + 4 = 30$.
Добијамо $3n = 26$, односно $n = 26 : 3$. Решење једначине није природан број.
Број 30 није члан низа.

б) Слично, решавамо једначину $3n + 4 = 49$, $3n = 45$, $n = 15$. Решење једначине је природни број 15. Број 49 је 15. члан низа.

Задатак 3

Дат је низ са општим чланом $3n + 5$. Може ли његов члан бити број: а) 53, б) 68?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колико малих једнакостраничних троуглова има следећи облик у низу на слици 4?



цртеж 4

2. Пронађи правило за одређивање следећег члана низа облика на цртежу 5. Затим, прецртај и попуни табелу.



цртеж 5

редни број облика	прва	друга	трећа	четврта	пета	шеста
број звезда у облику						

3. Први члан низа је 100. Сваки следећи члан низа добија се правилом за одређивање следећег члана „дељење са 2". Пронађи пети члан низа.

4. Пронађи правило за одређивање следећег члана низа:
а) 1, 2, 4, 8, 16,..., б) 600, 300, 150, 75,..., в) 12, 26, 40, 54,...,
г) 89, 86, 83, 80,..., е) 243, 81, 27, 9,... .

5. За низ 3, 8, 13, 18,.....:
а) пронађи правило за одређивање следећег члана,
б) запиши следећа 3 члана низа.

6. Пронађи непознате чланове a, b, c и d низа и запиши могуће правило за одређивање следећег члана:
а) 1, 2, 4, 8, 16,..., б) 600, 300, 150, 75,..., в) 12, 26, 40, 54,...,
г) 89, 86, 83, 80,....., д) 243, 81, 27, 9,... .

7. Дат је низ са општим чланом $3n - 1$. Пронађи:
а) прва 3 члана, б) чланове са редним бројевима 54 и 125.

8. Да ли бројеви 35, 23, −15, 77, 98 могу бити чланови низа са општим чланом $4n + 7$?

9. Књижара има попуст на читање лектира. Првог дана је продато 6 лектира, другог дана је продато 11 лектира, трећег дана је продато 16 лектира, итд.
Колико лектира је продато осмог дана, ако је сваког наредног дана продато 5 лектира више него претходног?

10. Зоки жели да поређа 55 балвана тако да у горњем реду буде 1 балван, а у сваком реду испод њега по 1 балван више. Колико ће балвана бити у најдоњем реду?

12. ОДРЕЂИВАЊЕ ОПШТЕГ ЧЛАНА НИЗА

Ако знамо општи члан низа, онда лако можемо пронаћи било који члан датог низа, без обзира на његов положај у низу. Зато је потребно да пронађемо начин да би одредили општи члан низа.

Активност

Запиши прва 3 члана низа са општим чланом: а) $n + 1$, б) $3n - 2$,

Пример 1

Пронађи заједнички члан низа чији је први члан 2, а правило за следећи члан је „додај 3“.

Састављамо табелу, тако што у први ред табеле уносимо редне бројеве чланова, а у други одговарајуће чланове низа 2, 5, 8, 11, 14, 17. У трећи ред уносимо производ разлике између чланова низа и редног броја члана $3n$.

редни број n	1	2	3	4	5	6
члан	2	5	8	11	14	17
$3n$	3	6	9	12	15	18

Сада примећујемо да треба да смањимо производ $3n$ за 1 да бисмо добили чланове низа.
Значи, општи члан овог низа је $3n - 1$.

Примећујемо да је низ из претходног примера растући.
Да видимо како одређујемо општи члан ако је низ опадајући.

Пример 2

Пронађи општи члан низа чији је први члан 2, а правило за следећи члан је „одузми 3“.

Састављамо табелу, тако да у први ред, опет, уносимо редне бројеве чланова, а у други одговарајуће чланове низа $2, -1, -4, -7, -10, \ldots$
Правило за одређивање следећег члана је „одузми 3“, па ће трећи ред бити производ разлике -3 и редног броја n.

редни број n	1	2	3	4	5	6
члан	2	-1	-4	-7	-10	-13
$3n$	-3	-6	-9	-12	-15	-18

Примећујемо да треба да увећамо производ $-3n$ за 5 да бисмо добили чланове низа.
Дакле, општи члан овог низа је $-3n + 5$.

Скенирај код и разгледај како се креирају низови

Пример 3

Општина је започела пројекат за садњу дрвећа поред пута који води до школе. Првог дана су посадили 3 дрвета. Сваког наредног дана су садили по 3 дрвета више него претходног дана.

а) Колико ће дрвета посадити трећег, четвртог и петог дана?
б) Пронађи заједнички члан низа.
в) Колико ће дрвета укупно бити засађено после 10 дана?
г) Ако се радња настави, ког узастопног дана ће бити засађено 96 дрвета?

а) Првог дана: 3 дрвета; Другог дана: $3 + 3 = 6$ дрвета; Трећег дана: $6 + 3 = 9$ дрвета; Четвртог дана: $9 + 3 = 12$ дрвета; Петог дана: $12 + 3 = 15$ дрвета

б) Добијени низ је: 3, 6, 9, 12, 15, ...

редни број n	1	2	3	4	5	6
члан	3	6	9	12	15	18
$3n$	3	6	9	12	15	18

Према табели, видимо да је заједнички члан низа $3n$.

в) Десетог дана биће засађено $3 \cdot 10 = 30$ дрвета.

После 10 дана биће засађено $30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3 = 165$ дрвета.

г) Тражимо редни број члана 96 у низу 3, 6, 9,... Решавамо једначину

$3n = 96$, $n = 32$.

Тридесет други члан у низу је број 96.

Задатак 1

Трајче је купио јелку висине 30 cm. Јелка расте 2 cm недељно.

а) Колико ће јелка бити висока после 1 месеца?

б) Наћи члан низа који даје висину јелке после n недеља.

в) Колико ће јелка бити висока после 8 месеци?

г) После колико недеља ће јелка бити висока 230 cm?

Пример 4

Наћи општи члан низа представљеног дијаграмом (*цртеж* 1).



цртеж 1

Од укупног броја кругова у шеми, можемо формирати низ 5, 8, 11,..

Размотримо везу између редног броја и броја белих и плавих кругова:

1 (редни број) · 3 (бели кругови) + 2 (плави кругови) = 5,

2 (редни број) · 3 (бели кругови) + 2 (плави кругови) = 8,

3 (редни број) · 3 (бели кругови) + 2 (плави кругови) = 11.

У сваком члану низа, број белих кругова је 3 · редни број, а у сваком члану има додатна 2 плава круга.

Општи члан низа ће бити $3n + 2$.

Задатак 2

Пронађи општи члан низа представљеног шемом (*цртеж* 2).



цртеж 2

Постоје ситуације у којима се два или више процеса одвијају истовремено, али према различитим правилима. То значи да треба да разгледамо низ чији су чланови заједнички чланови неколико низова.

Пример 5

Дат је низ кругова (*цртеж* 3).



цртеж 3

а) Колико кругова има стоти члан низа?

б) Колико црвених кругова има стоти члан низа?

в) Колико зелених кругова има члан који има 20 црвених кругова?

а) Заједнички члан низа 3, 6, 9,... , је $3n$. Стоти члан ће бити $3 \cdot 100 = 300$.

б) Заједнички члан низа црвених кругова је $n + 1$. Стоти члан је $100 + 1 = 101$.

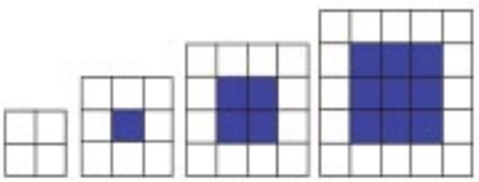
в) Из $n + 1 = 20$ добијамо $n = 19$, односно у 19. члану ће бити 20 црвених кругова. Тада је број кругова једнак $3 \cdot 19 = 57$, односно 19. члан има укупно 57 кругова. Од њих је 20 црвених, па ће 37 кругова бити зелених.

Задатак 3

Дат је низ облика (*цртеж* 4).

а) Прецртај и попуни табелу:

број плавих квадрата				
број белих квадрата				



цртеж 4

б) Колико квадрата укупно има десети члан низа?

в) Колико белих квадрата има члан низа који има 36 плавих квадрата?

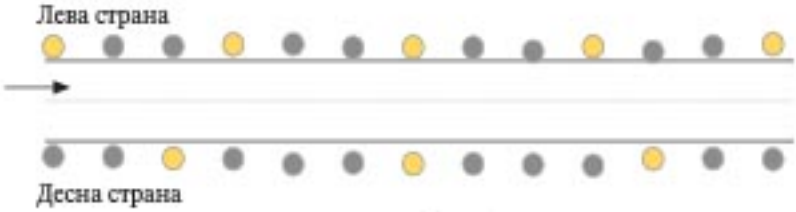
Пример 6

На аутопуту, светиљке са леве и десне стране пута нису увек упаљене. Оне се пале и гасе према одређеним правилима. На *цртежу* 5, жути кругови означавају светиљке које су упаљене, а сиви кругови означавају светиљке које су искључене.

а) Пронађи правило по којем се пали свака следећа светиљка са леве и свака следећа светиљка са десне стране аутопута.

б) Да ли је светиљка на позицији 94 са леве стране упаљена?

в) На којим позицијама су светиљке истовремено упаљене са обе стране? Пронађи опште правило по којем се светиљке пале истовремено.



цртеж 5

а) На левој страни, светиљке су упаљене на позицијама

1, 4, 7, 10,...

што значи да је прва светиљка упаљена, а правило за следећу упаљену светиљку је „додај 3 позиције".

На десној страни, светиљке су упаљене на позицијама

3, 7, 11, 15,...,

што значи да је прва упаљена цветиљка на позицији 3, а свака следећа светиљка се укључује према правилу „додај 4 позиције".

б) Проверићемо да ли је 94 члан низа 1, 4, 7, 10,... Општи члан низа је $3n - 2$.

Решавањем једначине

$3n - 2 = 94$, $3n = 96$, $n = 32$,

добијамо да је ово тридесет друга упаљена светиљка у низу.

в) Низови са светиљкама лево и десно су:

1, 4, 7, 10,13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34,...

3, 7, 11, 15,19, 23, 27, 31, 35,...

Уочавамо које позиције се појављују у оба низа, тако да је низ са упаљеним светиљкама на истој позицији

7, 19, 31,....

Заједнички члан низа 7, 19, 31,... је $12n - 5$.

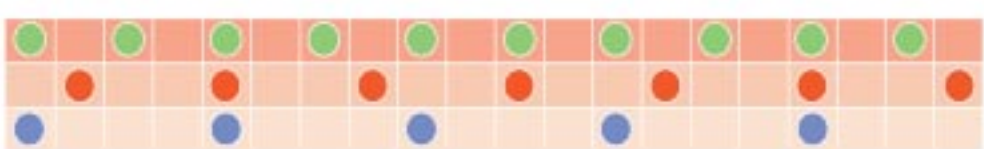
Задатак 4

Спојена су три низа новогодишњих сијалица: један зелени, један црвени и један плави. На *цртежу* 6 приказане су сијалице све три боје које су истовремено укључене. У празним пољима налазе се сијалице које су тренутно искључене.

а) Пронађи правило према којем се свака следећа сијалица у сваком од три низа укључује.

б) На којој следећој позицији ће се упалити само црвена сијалица?

в) Запиши низ позиција на којима су укључене сијалице све три боје у исто време. Пронађи опште правило овог низа.



цртеж 6

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Одреди заједнички члан низа:
   а) 34, 30, 26,..., б) 25, 20, 15, 10,..., в) 8, 15, 22, 29,..., г) 4, 6, 8, 10,...

2. Низ има први члан 15, а правило следећег члана је „додај 5".
   а) Запиши првих 6 чланова. б) Нађи заједнички члан низа.
   в) Нађи 225-ти члан.

3. Нађи заједнички члан низа представљеног дијаграмом на *цртежу* 7.
   во средина слика:



цртеж 7

4. Нађи општи члан низа на цртежу 8.



цртеж 8

5. У делу спортске хале, столице треба распоредити у редове тако да први ред има 3 столице, а сваки следећи ред има 3 столице више од претходног.
   а) Колико ће столица бити у петом реду?
   б) Колико ће столица бити у десетом реду?
   в) Напиши број столица у n-том реду.

6. У првом реду једне од трибина на фудбалском стадиону налази се 56 навијача. У другом реду је 59 навијача, у трећем реду 62 навијача итд. Колико је навијача у десетом реду?

7. Ученици спроводе кампању садње цвећа у школском дворишту. Првог дана су посадили 8 цветова. Сваког наредног дана саде 5 цветова више него претходног дана.
   а) Колико цветова ће посадити трећег, четвртог и петог дана?
   б) Колико цветова ће посадити n-тог дана?
   в) Колико ће цветова укупно бити засађено после 15 дана?
   г) Ако се акција настави, ког дана ће бити засађено 83 цвета?

8. Један ледени брег на Северном полу био је висок 105 m. Због топљења леда, ледени брег губи по 3 метра сваког месеца.
   а) Колико ће брег бити висок после 10 месеци?
   б) После колико месеци ће се ледени брег потпуно отопити?

9. а) Пронађи правило за следећег члана низа облика на цртежу 9 и одреди укупан број кругова у следећем облику у низу.



цртеж 9

б) Нацртај и допуни табелу:

број црвених кругова					
број плавих кругова					

в) Колико плавих кругова има члан низа који има 10 црвених кругова?

г) Колико кругова укупно има педесети члан?

10. У једној улици се уличне светиљке не пале сваке ноћи. (*цртеж* 10) Оне које су упаљене, пале се по посебним правилима за леву и десну страну улице.

а) Пронађи правило према којем се пали свака следећа светиљка на левој страни и свака следећа светиљка на десној страни улице.

б) Да ли је светиљка на позицији 35 са леве стране укључена?

в) На којим позицијама су светиљке истовремено упаљене са обе стране? Пронађи опште правило према којем се укључују истовремено.

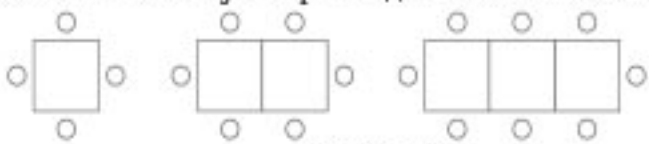


цртеж 10

11. Око стола се могу поставити 4 столице. *Цртеж* 11 приказује како се столови могу спојити да би се сместило више људи.

а) Колико људи може да седи за 15 спојених столова?

б) Колико столова је потребно да би се сместило 40 људи заједно?



цртеж 11

13. ФУНКЦИЈА

Дефиниција функције

Активност

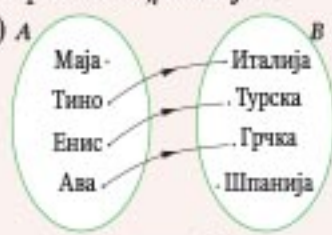
Са релацијама R_1, R_2 и R_3 из скупа ученика A = {Маја, Тино, Енис, Ава} у скупу земаља B = {Италија, Шпанија, Грчка, Турска} одређено је који је ђак у којој земљи боравио. Они су представљени помоћу графика на *цртежу* 1.

а)



Релација R_1

б)



Релација R_2

в)



Релација R_3

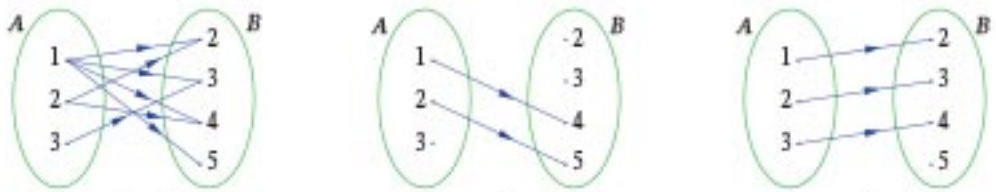
цртеж 1

Према графику релације:
а) R_1 утврди да ли је неки ђак посетио више од једне земље,
б) R_2 утврди да ли постоји ђак који није посетио ниједну земљу,
в) R_3 утврди да ли је сваки од ђака посетио било коју земљу.

Релација из скупа A у скупу B којом је, према неком правилу, сваки елемент $x \in A$ повезан са тачно једним елементом $y \in B$ назива се **функција** из скупа A у скупу B.
Скуп A се назива **домен**, а скуп B **кодомен** функције.
Пишемо $f: A \to B$ и читамо f је функција од A до B.

Пример 1

Од скупа $A = \{1, 2, 3\}$ у скупу $B = \{2, 3, 4, 5\}$ дате су релације:
R_1: „ ... је делилац ... “ R_2: „ ... је 3 мањи од ... “, R_3: „... је за 1 мањи од ...“.
Они су представљени графиком на *цртежу* 2. Која од ових релација је функција?



Релација R_1 Релација R_2 Релација R_3

цртеж 2

Са релацијом R_1, постоји елемент у скупу A (елемент 1) који је повезан са два различита елемента у скупу B (постоји елемент из којег излазе две стрелице).
Са релацијом R_2, постоји елемент у скупу A (елемент 3) који није повезан ни са једним елементом скупа B (постоји елемент из којег не излази стрелица).
Са релацијом R_3, сваки елемент скупа A је повезан са тачно једним елементом скупа B (тачно једна стрелица излази из сваког елемента). Зато је релација R_3 функција из скупа A у скупу B.

Задатак 1

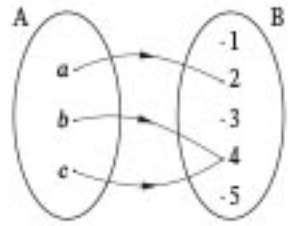
Нека су дати скупови $M = \{1, 3, 5\}$ и $N = \{2, 4, 6\}$. Представи графом релацију између елемената скупова M и N датом са:
а) „ ... је 2 пута мањи од ... “, б) „ ... је претходник ... “, в) „ ... је делилац ... “.
Која од релација је функција? Објасни одговор.

Нека је дата функција $f: A \to B$. Ако је елементу $x \in A$ придружени елемент $y \in B$, тада за x кажемо да је **оригинал**, а за y кажемо да је слика од x. У том случају записујемо
$y = f(x)$.

Симбол x, којим означавамо било који елемент из скупа A, назива се **независна променљива**, а y или $f(x)$ се назива **зависна променљива** или **вредност функције** која је одговарајућа са x.

Пример 2

За функцију $f: A \to B$ на слици 3, пронађи:
а) оригинал елемента 2 скупа B,
б) слику елемента b скупа A.



цртеж 3

а) Оригинал елемента 2 из B је елемент a из A.
б) Слика елемента b из A је елемент 4 из B и пишемо $f(b) = 4$.

Нека је $A = \{2, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Од скупа A до скупа B, функција f се одређује правилом „... је претходник ...“. Начин повезивања функције $f: A \to B$ може се записати **формулом**

$f(x) = x + 1$ или $y = x + 1$, где је $x \in A$.

Према формули, можемо израчунати вредности функције које одговарају вредностима независне променљиве:

за $x = 2$ добијамо $f(2) = 2 + 1 = 3$, за $x = 4$ добијамо $f(4) = 4 + 1 = 5$.

Вредности независне променљиве x и одговарајуће вредности функције $f(x)$ могу се организовати у **табели**.

x	2	4
$f(x)$	3	5

У првом реду записујемо све вредности независне променљиве x, а у другом реду одговарајуће вредности функције $f(x)$.

Скенирај код и истражи функције.

Пример 3

Дата је функција $f(x) = 3x - 1$.
а) Нацртај и попуни табелу. б) Пронађи домен и кодомен функције.

x	5		9	
$f(x)$		20		32

а) Вредност функције налазимо тако што је уносимо у формулу функције:
за $x = 5$ добијамо $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$,
за $x = 9$ добијамо $f(9) = 3 \cdot 9 - 1 = 26$.

Вредност независне променљиве, за дату вредност зависне променљиве, налазимо заменом у формули функције:

$20 = 3x - 1,\ 21 = 3x,\ \ x = 7$

$32 = 3x - 1,\ 33 = 3x,\ \ x = 11.$

Добијамо табелу:

x	5	7	9	11
$f(x)$	14	20	26	32

б) Из табеле видимо да је домен скуп $\{5, 7, 9, 11\}$.

Кодомен је било који скуп који садржи вредности 14, 20, 26 и 32.

Задатак 2

Дата је функција $f(x) = 2(x - 1)$.

а) Нацртај и попуни табелу. б) Нађи домен и кодомен функције.

x			14	
$f(x)$	12	10		30

Функције у реалним ситуацијама

Функције имају широку примену у природним наукама, техничким наукама и свакодневном животу. Оне нам омогућавају да разумемо ситуације и предвидимо промене које су резултат међусобне зависности величина.

Пример 4

У једној лабораторији, биолог прати раст колоније бактерија и бележи резултате у табелу. На почетку праћења било је 9.000 бактерија.

а) Напиши функцију (математички модел) којом ћеш изразити број бактерија y у зависности од броја прошлих дана x.

б) Колико ће бактерија бити после седам дана?

дан	први	први	други	други
време мерења	10:00	22:00	10:00	22:00
број бактерија	9000	15000	21000	27000

а) Из табеле закључујемо да се у року од 24 сата створи 12.000 нових бактерија, јер је $21000 - 9000 = 12000$ и $27000 - 15000 = 12000$.

Тражена функција је $y = 12000x + 9000$.

б) После седам дана биће $y = 12000 \cdot 7 + 9000 = 93000$ бактерија.

Задатак 3

У једном резервату за птице, истраживачи и волонтери су до сада прстеновали 3500 птица. Планирају да наставе да прстенују 300 нових птица сваког месеца.

а) Напиши функцију којом ћеш изразити број прстенованих птица y у зависности од броја месеци који су прошли x.

б) Колико ће прстенованих птица резерват имати после 1 године?

Пример 5

Јованов аутомобил троши 0,08 l горива на сваки пређени километар.

а) Напиши функцију која изражава потрошено гориво y (у литрима) у зависности од пређеног пута x (у километрима).

б) Напиши функцију којом ћеш изразити потрошено гориво y (у литрима) у зависности од пређеног пута x (у километрима), ако је познато да је током путовања Јован потрошио још 1,4 l горива у мировању возила.

в) Колико је литара горива Јован потрошио ако је дужина пута 620 km?

а) Тражена функција је $y = 0{,}08x$. б) Функција је $y = 0{,}08x + 1{,}4$.

в) Јован је потрошио $y = 0{,}08 \cdot 620 + 1{,}4 = 51\ l$.

Задатак 4

Зависност масе неке супстанце од њене запремине дата је формулом $m = \rho V$, где је ρ густина супстанце. Густина млека је 1,03 kg/l. Колика је маса:

а) млека упакованог у посуду запремине 0,5 l,

б) флаше са 1 l млека, ако флаша има масу од 0,1 kg?

Пример 6

Једна мала компанија која производи керамичке шоље жели да утврди колики ће бити њихов укупни профит, у зависности од броја произведених и продатих шоља. Фиксни трошкови компаније (струја, закупнина, превоз) износе 12000 денара месечно. За материјал и радну руку се троши 80 денара за сваку шољу.

Продајна цена једне шоље је 150 денара.

а) Напиши функцију којом ћеш изразити профит y у зависности од броја произведених шоља x.

б) Израчунај профит фирме ако компанија прода 300 шоља.

в) Колико шоља компанија мора да прода да не би имала нити добитке нити губитке?

г) Објасни како ова функција може помоћи фирмама при планирању производње и продаје.

а) Приход фирме је $150x$ (цена количини). Укупни трошкови су $12000 + 80x$.

Добитак је разлика између прихода и трошкова:

$y = 150x - (12000 + 80x) = 70x - 12000$.

б) Ако компанија прода 300 шољи, добитак ће бити
$y = 70 \cdot 300 - 12000 = 21000 - 12000 = 9000$ денара.

в) Нема нити добитка нити губитка када је
$y = 0, 0 = 70x - 12000, x = 12000 : 70 \approx 171{,}4$.
Значи, компанија мора да прода најмање 172 шоље како не би била у губитку.

г) Ова функција омогућава власницима: да предвиде добитак или губитак за било коју количину у производњи, да планирају цену једне шоље, као и да одлуче да ли вреди да се повећа производња или да се смање трошкови.

Задатак 5

Једна мала компанија која производи штампане памучне мајице жели да утврди колики ће бити њихова укупна зарада, у зависности од броја произведених и продатих мајица. Фиксни трошкови компаније (закуп локала, струја, интернет, одржавање машина) износе 15000 денара месечно. За сваку мајицу, 120 денара се троши на материјал, боју и радну руку. Продајна цена једне мајице је 260 денара.

а) Напиши функцију којом ћеш изразити добитак y у зависности од броја продатих мајица x.

б) Израчунај добитак компаније ако продају 250 мајица месечно.

в) Колико мајица треба да прода компанија да не би имала ни добитак ни губитак?

г) Објасни како овај математички модел може помоћи компанији у планирању производње и продаје.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дати су скупови $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Између елемената скупова A и B дата је релација: а) „ ... је 5 мањи од ... “, б) „ ... је 3 пута мањи од ... “. Која од ових релација је функција?

2. У једном домаћинству, потрошња воде зависи од броја људи који живе у кући. Познато је да свака особа потроши просечно 60 литара воде дневно.

а) Нацртај и попуни табелу.

број људи	1	2	4	6
потрошња воде (l)				

б) Напиши правило које изражава везу између броја људи и потрошње воде.

в) Да ли је ова веза функција?

г) Шта би представљали домен и кодомен у овом случају?

3. У једном малом истраживању, ђаци су бележили колико чаша воде пију у току дана:

ђак	Ана	Бојан	Селма	Арбен
број попијених чаша воде	6	8	5	8

а) Да ли ова веза међу ђацима и броја чаша попијене воде одређује функцију?

б) Ако си одговорио/ла са да, напиши домен и кодомен.
Ако је одговор не, објасни зашто веза не одређује функцију.

4. Нацртај и попуни табеле, ако је $f(x) = 2x + 5$ и $g(x) = 3(x - 2)$.
користећи дату функцију:

x	3	7		
$f(x)$			25	35

x		8		12
$g(x)$	9		24	

5. Мила је понела 15000 денара са собом на одмор и одлучила је да ће свакодневно трошити 1200 денара. Напиши функцију којом ћеш изразити количину новца y (у денарима) у зависности од броја дана x.

6. Продавац брескви треба да плати 600 денара за дневну закупнину тезге на пијаци. Бресквe ће продавати по цени од 90 денара по килограму.

а) Напиши функцију којом ћеш изразити зависност количине новца у (у денарима) од количине продатих брескви x (у килограмима)?

б) Колико ће продавац зарадити ако прода 150 килограма брескви?

7. Један брод је до сада прешао 250000 km. Сутра креће на крстарење на којем ће прелазити 120 km дневно.

а) Напиши функцију којом ћеш изразити зависност броја пређених километара брода y од броја дана x проведених на путовању?

б) Колико ће километара брод укупно прећи након 10 дана?

8. У продавници се одобрава попуст од 10% за сваку куповину преко 1000 денара.

а) Напиши функцију која одређује укупну цену y од износа рачуна x.

б) Објасни како ова функција помаже трговцима у планирању ценовне политике.

9. Мала пекара која производи мафине жели да утврди колики ће бити њихов укупни профит, у зависности од броја произведених и продатих мафина.
Фиксни трошкови пекаре (струја, закупнина, плате, вода) износе 9000 денара месечно.
Сваки мафин кошта 30 денара за састојке и радну руку.
Продајна цена једног мафина је 70 денара.

а) Пронађи математички модел (функцију) која одређује зависност профита у од броја продатих мафина x.

б) Израчунај профит пекаре ако прода 400 мафина.

в) Колико мафина пекара треба да прода да би достигла тачку рентабилности?

г) Објасни како ова функција може помоћи пекари у планирању производње и продаје.

14. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА. ГРАФИК ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Линеарна функција

Активност

Биоскопска карта кошта 150 денара. За колико ће се повећати износ који морамо да платимо ако купимо још 1 карту, још 2 карте и тако даље? Да ли се износ увек повећава за исти износ? Колики је тај износ?

Функција облика $y = kx + n$ (или $f(x) = kx + n$) где су k и n рационални бројеви назива се **линеарна функција.**
Број k се назива се **коефицијент правца** а број n је **слободни члан** линеарне функције.

Функције $y = 7x$, $y = 2x - 3$, $y = 1 - 5x$, $y = \frac{1}{2}x - 3$, $y = -\frac{3}{4}x + 2$, $y = x + \frac{3}{7}$ су линеарне функције.

Пример 1

Такси компанија наплаћује 50 денара при поласку и 20 денара за сваки пређени километар. Табела приказује цену коју морамо да платимо за сваки пређени километар.

Растојање (km)	0	1	2	3
цена (денари)	50	$20 \cdot 1 + 50 = 70$	$20 \cdot 2 + 50 = 90$	$20 \cdot 3 + 50 = 110$

Примећујемо да за сваки пређени километар плаћамо још 20 денара.
Зависност између растојања x и цене коју морамо да платимо y одређена је линеарном функцијом $y = 20x + 50$.
Коефицијент правца је $k = 20$ и показује колико се y повећава ако се x повећа за 1.
Слободни члан је $n = 50$ и показује почетну вредност, односно вредност y када је $x = 0$.

Задатак 1

Који је коефицијент правца и који је слободни члан функције:
а) $y = 2x + 3$, б) $y = 5x$, в) $y = 4$, г) $y = x - 2$?

Задатак 2

Напиши формулу линеарне функције са коефицијентом правца и слободним чланом:
а) $k = 3, n = -1$, б) $k = 0, n = -2$, в) $k = -1, n = 0$, г) $k = 0, n = 0$.

График линеарне функције

Пример 2

Нацртај график линеарне функције $y = x + 4$.

Према формули линеарне функције

$$y = x + 4$$

израчунавамо вредност y за неколико вредности x. На пример:

за $x = -3, y = -3 + 4 = 1$; за $x = -2, y = -2 + 4 = 2$; за $x = -1, y = -1 + 4 = 3$;

за $x = 0, y = 0 + 4 = 4$; за $x = 1, y = 1 + 4 = 5$; за $x = 2, y = 2 + 4 = 6$.

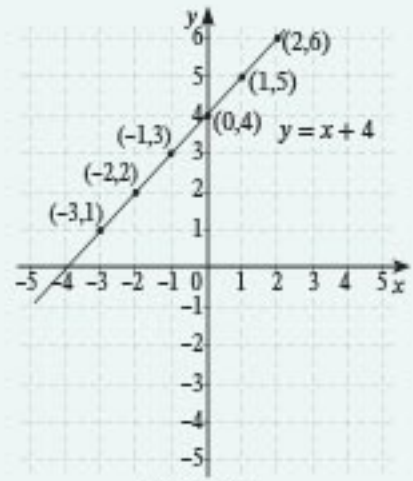
Добијене вредности можемо записати у табелу:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

Уређени парови: $(-3, 1)$, $(-2, 2)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 5)$ и $(2, 6)$ задовољавају формулу линеарне функције $y = x + 4$. За њих кажемо да су то тачке **графика линеарне функције**.

Добијени уређени парови могу се представити као тачке у координатном систему, тако да је прва координата уцртана на x-оси, а друга координата на y-оси.

Повезивањем ових тачака добијамо **праву** која визуелно представља график линеарне функције $y = x + 4$ (*цртеж* 1).



цртеж 1

Пример 3

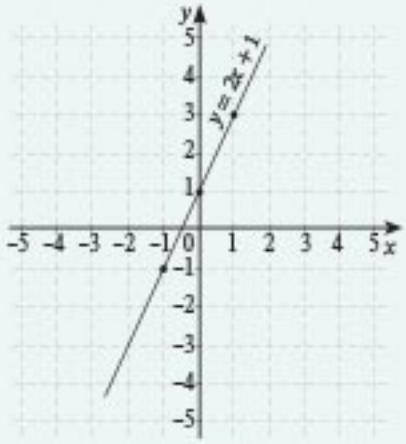
Нацртај график линеарне функције $y = 2x + 1$.

График линеарне функције је права, тако да су две тачке довољне да се она нацрта (*цртеж* 2). Састављамо табелу у коју уносимо две произвољне вредности за x. Затим, користећи формулу линеарне функције $y = 2x + 1$, израчунавамо одговарајуће вредности за y:

за $x = -1$, $2 \cdot (-1) + 1 = -1$; и за $x = 0$, $2 \cdot 0 + 1 = 1$.

x	-1	0
y	-1	1

Тако смо добили две тачке на графику линеарне функције: $(-1, -1)$ и $(0, 1)$. Представићемо тачке у координатном систему, повући линију која пролази кроз њих и на правој написати формулу. Добијена права је график линеарне функције $y = 2x + 1$.



цртеж 2

Задатак 3

Нацртај график функције:
а) $y = -3x + 2$, б) $y = x - 2$.

Скенирај код и нацртај функције.

Линеарне функције са истим коефицијентом правца. Линеарне функције са истим слободним чланом

Активност

Биљка ***A*** је висока 5 cm, а биљка Б је висока 3 cm. Обе биљке расту истом брзином од 2 cm недељно.
а) Израчунај висину биљака у првих 5 недеља.
б) Како се висина биљака мења сваке недеље?
в) Шта је исто код биљака?

Пример 4

Температура након изласка сунца у Скопљу била је 3 °C, а у Битољу -1 °C. У оба града температура расте за 2 °C сваког сата.

а) За сваки град, изрази зависност између времена и температуре линеарном функцијом. Објасни шта уочаваш.

б) Нацртај графике две линеарне функције у истом координатном систему. Објасни шта уочаваш.

а) За сваки град означавамо са x сате након изласка сунца, а са y одговарајуће температуре у граду. Табела даје вредности температура у два града, током неколико сати након изласка сунца.

Број сати после изласка сунца (x)	температура у Скопљу (y_1)	температура у Битољу (y_2)
0	3 °C	-1 °C
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$ °C	$2 \cdot 1 - 1 = 1$ °C
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$ °C	$2 \cdot 2 - 1 = 3$ °C
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$ °C	$2 \cdot 3 - 1 = 5$ °C

Зависност између времена x и температуре y_1, односно y_2, сваком од градова је одређена линеарним функцијама:

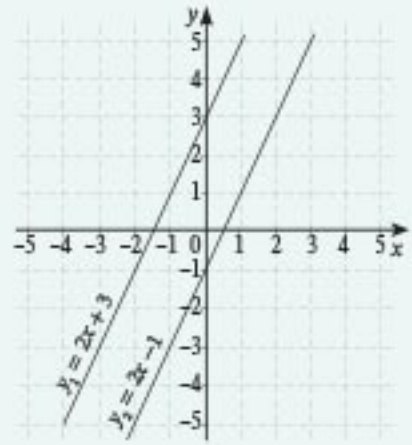
$y_1 = 2x + 3$, за Скопје и $y_2 = 2x - 1$, за Битољ.

Примећујемо да обе функције имају исти **коефицијент правца** једнак 2.

б) На *цртежу* 3, су нацртани графици линеарних функција

$y_1 = 2x + 3$ и $y_2 = 2x - 1$.

Примећујемо да су графици линеарних функција **паралелне праве**.



цртеж 3

Графици линеарних функција са **истим коефицијентом** правца су **паралелне линије**.

Задатак 4

У истом координатном систему нацртај графике линеарних функција

$y_1 = -3x + 1$ и $y_1 = -3x - 3$.

а) Који је узајамни положај графика линеарних функција?

б) Упореди коефицијенте правца линеарних функција.

Активност:

Марко и Адора штеде на различите начине. Марко има 100 денара и сваког месеца штеди по 300 денара. Адора има 100 денара и сваког месеца штеди по 500 денара.
а) Како се мења висина износа Маркове и Адорине уштеђевине мења сваког месеца?
в) Шта је исто код обоје?

Пример 5

Ана и Беким имају по 3 налепнице. Ана свакодневно додаје 2 нове налепнице у своју колекцију. Беким свакодневно поклања једну налепницу свом другу.
а) За свако дете изрази линерном функцијом зависност између броја протеклих дана и броја налепница. Објасни шта примећујеш.
б) Нацртај графике две линеарне функције у истом координатном систему. Објасни шта примећујеш.

а) Анин број налепница се повећава за једну сваког дана, док се Бекимов смањује за две.
Нека је x број протеклих дана, а y број налепница. У табели су дати број налепница за оба детета, у периоду од неколико дана.

број протеклих дана (x)	број Аниних налепница (y_1)	Број Бекимових налепница (y_2)
0	3	3
1	$2 \cdot 1 + 3 = 5$	$-1 \cdot 1 + 3 = 2$
2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	$-1 \cdot 2 + 3 = 1$
3	$2 \cdot 3 + 3 = 9$	$-1 \cdot 3 + 3 = 0$

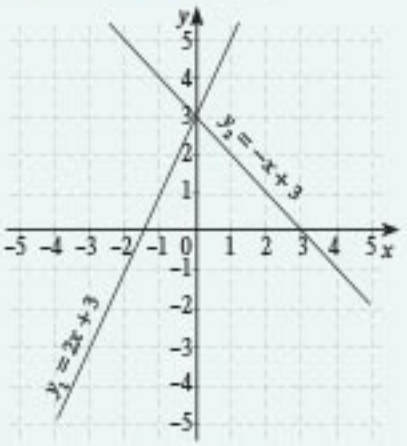
Зависност између броја протеклих дана x и броја налепница y_1, односно y_2 је одређена линеарним функцијама:

Ана $y_1 = 2x + 3$, и Беким $y_2 = -x + 3$.

Примећујемо да обе функције имају **исти слободни члан** једнак 3.

б) На *цртежу* 4, графикони линеарних функција су нацртани у истом координатном систему.

$y_1 = 2x + 3$ и $y_2 = -x + 3$.



цртеж 4

Примећујемо да графикони линеарних функција секу y-осу у тачки $(0,3)$.

Графици линеарних функција са истим слободним чланом n су линије које секу y-осу у тачки $(0, n)$.

Задатак 5

У истом координатном систему нацртај графике линеарних функција:
$y_1 = -3x - 1$ и $y_2 = x - 1$.
а) У којој тачки се графици линеарних функција секу?
б) Упореди слободне чланове линеарних функција.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колики је коефицијент, а колики слободни члан функције:
   а) $y = 3x + 4$, б) $y = x$, в) $y = -5$, г) $y = -x - 2$?
2. Напиши формулу линеарне функције са коефицијентом и слободним чланом:
   а) $k = -3$, $n = -4$, б) $k = 0$, $n = 3$, в) $k = 6$, $n = 0$, г) $k = 2$, $n = -5$.
3. Нацртај график линеарне функције: а) $y = -x + 3$, б) $y = 3x - 2$, в) $y = 2x$.
4. Поређај линеарне функције у групе међусобно паралелних прави:
   $y = 2x + 15$, $y = 5x - 7$, $y = 5x - 7$, $y = -7x - 2$, $y = 2x$, $y = 5x$,
   $y = -7x + 3$, $y = 2x - 3$, $y = -7x$, $y = x$, $y = 5x - 1$, $y = 2x - 7$.
5. Напиши линеарну функцију чији је график права паралелна са правом $y = 5x - 6$ и сече y – осу у тачки $(0, 7)$.
6. Напиши линеарну функцију чији је график права паралелна са правом $y = 4x + 3$ и сече праву $y = x + 1$ на y – оси.
7. За коју вредност a, графикони функција $y = (2a + 3)x + 1$ и $y = (a - 5)x + 2$ су паралелне праве?
8. За коју вредност a, графикон функције $y = (a + 2)x - 2a + 3$ сече y – осу у тачки $(0,5)$?
9. Матеј почиње да вози бицикл у 8 сати, а Андреј у 9 сати. Обојица возе константном брзином од 15 km/h.
   а) Напиши формуле линеарних функција које описују кретање Матеја и Андреја,
   б) Нацртај њихове графиконе. Који је њихов међусобни положај?
10. Душко и Давид су добили по 5000 денара за рођендан. Душко је одлучио да уштеди свој новац и да сваки дан додаје 50 денара, док је Давид сваки дан трошио 100 денара од свог новца.
    а) Напиши линеарну функцију која изражава новчани износ y (у денарима) као функцију времена x (у данима).
    б) Које су координате тачке пресека графицима обе функције?

Истраживање

Размисли и објасни како можеш графички да прикажеш линеарну функцију $y = 3x - 1$, у истом координатном систему у којем је нацртан график линеарне функције $y = 3x + 2$, без прављења табеле вредности.
Уопшти закључак за функцију облика $y = kx + n$.

15. ТОК ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

Термин „ток“ се природно повезује са током времена, током реке итд. У том смислу, река има свој ток у коме њен ниво воде може да расте, опада или остане константан. Открићемо од чега зависи ток једне линеарне функције.

Растућа линеарна функција

Активност

Африм вози бицикл до врха Водна. Да ли ће се у наредних неколико минута променити надморска висина на којој се налази? Да ли ће се повећати или смањити?

Пример 1

Ива је одлучила да штеди од свог џепарца у висини од 2500 денара, тако што ће свакодневно додавати по 75 денара.

а) Запиши линеарну функцију зависности уштеђеног износа y (у денарима) од времена штедње x (у данима).

б) Користи табелу да би представио ову зависност за првих 5 дана.

в) Који је знак коефицијента правца линеарне функције?

г) Како се вредност промењиве y мења са повећањем вредности промењиве x?

а) Ивина почетна уштеђевина је 2500 денара. Сваког дана она додаје 75 денара, тако да ће после x дана имати $2500 + 75x$. Дакле, линеарна функција $y = 75x + 2500$ је одређена.

б)

време штедње x (у денарима)	1	2	3	4	5
Уштеђен износ (у денарима)	2575	2650	2725	2800	2875

в) Коефицијент нагиба је $k = 75 > 0$. Знак коефицијента нагиба је позитиван.

г) Из табеле можемо видети да са повећањем вредности промењиве x вредност промењиве y расте. На пример, од $3 < 5$ имамо да је $2725 < 2800$.

Кажемо да је дата линеарна функција **растућа функција**.

Пример 2

У истом координатном систему, нацртајте растуће линеарне функције $y = x + 3$ и $y = 2x - 1$.

а) Која линеарна функција брже расте?

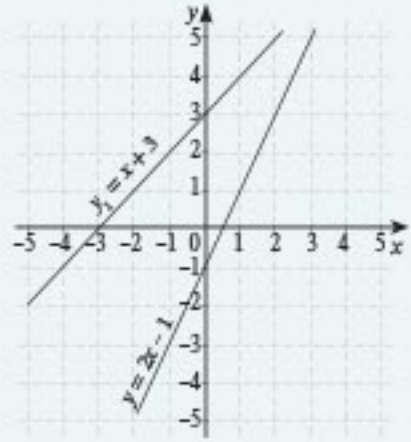
б) Упореди њихове коефицијенте правца? Шта се може закључити?

Графикони линеарних функција су приказани на *цртежу* 1.

а) Из графикона видимо да је графикон линеарне функције $y = 2x - 1$ стрмији од графикона линеарне функције $y = x + 3$, па линеарна функција $y = 2x - 1$ **расте брже** од линеарне функције $y = x + 3$.

б) Линеарна функција $y = 2x - 1$ ($k = 2$) има већи коефицијент правца од линеарне функције $y = x + 3$ ($k = 1$).

x	0	1
$y = x + 3$	3	4
$y = 2x - 1$	−1	1



цртеж 1

Између две растуће линеарне функције, линеарна функција са већим коефицијентом правца расте брже.

У свакодневном животу постоје ситуације у којима, постављањем функције, можемо предвидети ток догађаја и планирати активности које нам више одговарају.

Пример 3

Компанија мобилне телефоније 1 нуди: 1 денар по минуту разговора и месечну накнаду од 200 денара.
Компанија 2 нуди 2 денара по минуту разговора и месечну накнаду од 100 денара.

а) За обе компаније, напиши линеарну функцију зависности цене у (у денарима) од трајања позива x (у минутима).

б) Нацртај графике две линеарне функције у истом координатном систему.

в) Објасни која је компанија повољнија у зависности од дужине позива током месеца?

а) Линеарна функција за компанију 1 је $y = x + 200$.
Линеарна функција за компанију 2 је $y = 2x + 100$,

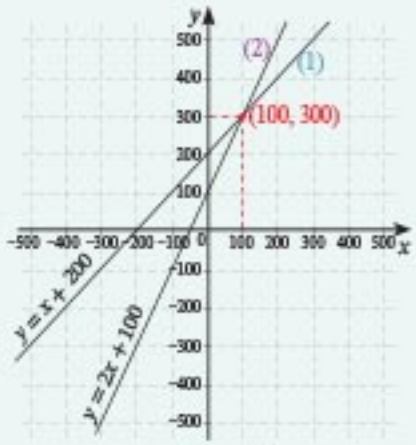
б) Графици две линеарне функције у истом координатном систему дати су на *цртежу* 2.

компанија 1

трајање разговора (x у минутима)	0	50	100
цена (y у денарима)	200	250	300

компанија 2

трајање разговора (x у минутима)	0	50	100
цена (y во денари)	100	200	300



цртеж 2

в) Праве се секу у тачки (100, 300).
Координата $x = 100$ је број минута.
Координата $y = 300$ је месечна цена позива.
Вредности на тачки пресека значе да ћемо за 100 минута разговора платити исто (300 денара) код обе компаније.
Да бисмо утврдили која је понуда повољнија, испитаћемо ток две функције у односу на тачку пресека. Из графикона видимо да:

- ако разговарамо дуже од 100 минута, одговараће нам понуда чија цена спорије расте, а то је компанија 1.
- ако разговарамо мање од 100 минута, одговараће нам понуда чија цена брже расте, а то је компанија 2.

Задатак 1

На пијаци 1, плаћа се дневна закупнина за тезгу 400 денара, а цена јабука је 50 денара по килограму.
На пијаци 2, дневна закупнина за тезгу износи 500 денара, а цена јабука је 70 денара по килограму.

а) Објасни на којој пијаци је продавцу исплативије да изнајми тезгу у зависности од количине продатих јабука.

б) На којој пијаци ће продавац зарадити више ако прода 400 kg јабука, а на којој ако прода 800 kg јабука?

Опадајућа линеарна функција

Активност

Теона има 10 флашица сока. Сваког дана даје по једну флашицу својој другарици Есми. Да ли ће се број Теониних флашица сока повећати или смањити у наредних неколико дана?

Пример 4

Андреа има 8500 денара на свом рачуну. Сваког дана потроши 500 денара са рачуна.

а) Напиши линеарну функцију зависности износа новца на рачуну y (у денарима) од протеклог времена x (у данима).

б) Користи табелу да би представио/ла ову зависност за првих 5 дана.

в) Који је знак коефицијента правца линеарне функције?

г) Како се вредност променљиве y мења са повећањем вредности променљиве x?

а) Из датих услова видимо да се почетни износ од 8500 денара смањује за 500 денара сваког дана. Ово дефинише линеарну функцију $y = -500x + 8500$.

б)

Време трошења (x у денарима)	1	2	3	4	5
Износ на рачуну (y у денарима)	8000	7500	7000	6500	6000

в) Коефицијент правца је $k = -500 < 0$. Знак коефицијента правца је негативан.

г) Из табеле можемо видети да се повећањем вредности променљиве x, вредност променљиве y опада. На пример, за $2 < 4$ имамо да је $7500 > 6500$.

Кажемо да је дата линеарна функција **опадајућа функција**.

Пример 5

У истом координатном систему, нацртај опадајуће линеарне функције $y = -x + 3$ и $y = -2x + 1$.

а) Која линеарна функција брже опада?

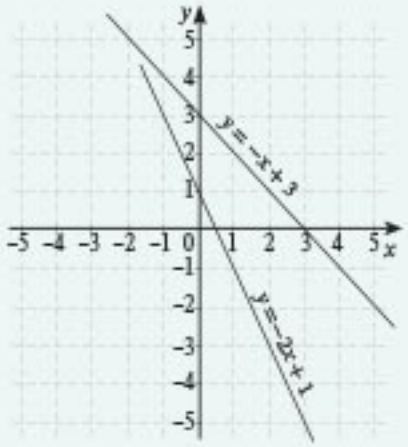
б) Упореди њихове коефицијенте правца? Шта се може закључити?

Графици линеарних функција су приказани на *цртежу* 3.

а) Из графика видимо да је график линеарне функције $y = -2x + 1$ стрмији од графика линеарне функције $y = -x + 3$, па линеарна функција $y = -2x + 1$ **опада брже** од линеарне функције $y = -x + 3$.

б) Линеарна функција $y = -2x + 1$ $(k = -2)$ има **мањи коефицијент правца** у односу на линеарну функцију $y = -x + 3$ $(k = -1)$.

x	0	1
$y = -x + 3$	3	2
$y = -2x + 1$	1	−1



цртеж 3

Између две опадајуће линеарне функције, линеарна функција са мањим коефицијентом правца опада брже.

Пример 6

Истраживачи су поставили термометре за мерење температуре морске воде и ваздуха на 2 локације на обали. Термометар 1 је прво мери на површини мора и сваког сата се спушта 5 по метара. Термометар 2 се налази 2 метра испод нивоа мора и истовремено са термометром 1 почиње да се спушта 4 метра сваког сата.

а) Напиши формуле за зависност дубине на којој се термометар налази y (у метрима) од времена спуштања x (у сатима) за оба термометра.

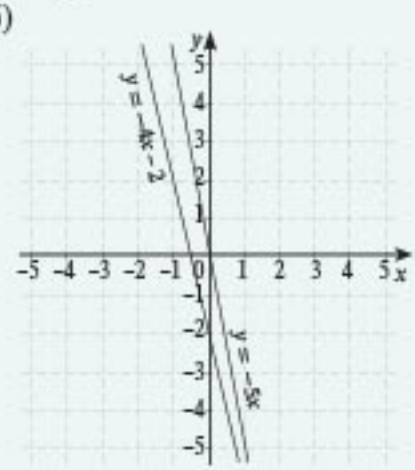
б) Нацртај графиконе две функције у истом координатном систему.

в) Који од термометара ће брже измерити температуру на локацији која се налази на -150 метара надморске висине?

а) За термометар 1 имамо: $y = -5x$, а за термометар 2 имамо: $y = -4x - 2$.

в) Ако за термометар 1 имамо да је -150 метара надморске висине, имамо да је $y = -150$.
Зато у формули $y = -5x$ замењујемо
$-150 = -5x$, па је $x = 30$ сати.
За термометар 2 имамо: $y = -4x - 2$,
$-150 = -4x - 2$, $-148 = -4x$, $x = 37$ сати.
Термометар 1 ће брже стићи до локације која је на -150 метара надморске висине.

б)



цртеж 4

Задатак 2

Са врха брда, Мерсиха се спушта жичаром, а Адем скијашком стазом, којом ће прећи за 1 km дужи пут од пута којим пролази жичара. Жичара се креће брзином од 15 km/h, а Адем скија брзином од 25 km/h.

а) Напиши формуле за зависност пређеног пута u (у километрима) од времена x (у сатима) за спуштање Мерсихе и Адема,

б) Нацртај графике за обе функције у истом координатном систему,

в) Колику је удаљеност свако од њих прешао ако су после 10 минута стигли до подножја брда у исто време?

Ни растућа ни опадајућа линеарна функција

Активност

Једна компанија је произвела 300 производа. Због дефекта на машинама, производња је заустављена. Да ли ће се број производа које производи компанија повећати, смањити или остати исти (неће се ни повећати ни смањити)?

Пример 7

У једном фрижидеру температура је $-4°C$ током целог дана.

а) Напиши формулу за зависност температуре y у фрижидеру од броја сати x.

б) Користи табелу да би представио/ла ову зависност за прва 3 сата.

в) Колики је коефицијент правца линеарне функције?

г) Како се вредност промењљиве y мења у зависности од вредности промењљиве x?

а) Температура је $-4°C$ и не мења се током дана. На овај начин је одређена линеарна функција $y = -4$

б)

протекло време (x у сатима)	1	2	3
Температура (y)	4 °C	-4 °C	-4 °C

в) Коефицијент правца је $k = 0$.

г) Из табеле можемо да видимо да се променом вредности промењљиве x вредност промењљиве y није променила. За дату линеарну функцију кажемо да није **ни растућа ни опадајућа функција** (константна функција).

Линеарна функција $y = kx + n$ је:
- растућа, ако је $k > 0$,
- опадајућа, ако је $k < 0$,
- ни растућа ни опадајућа, ако је $k = 0$.

Скенирај код и разгледај функције.

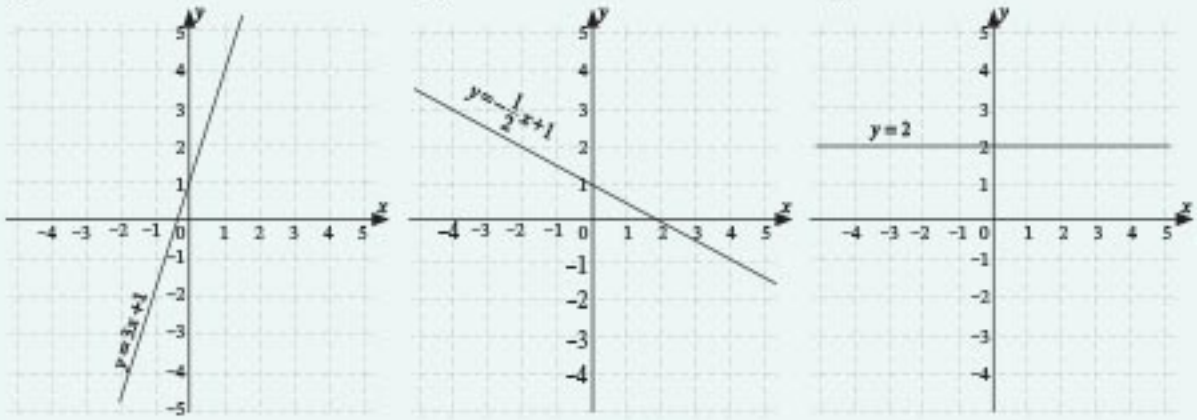
Пример 8

На *цртежу* 5 приказан је график линеарне функције: а) $y = 3x + 1$, б) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, в) $y = 2$. За сваку од линеарних функција, одреди да ли је растућа или опадајућа или није ни растућа ни опадајућа.

Из графика линеарне функције $y = 3x + 1$ примећујемо да се повећавањем вредности промењиве x повећавају, вредности промењиве y. Зато је линеарна функција растућа.

У линеарној функцији $y = -\frac{1}{2}x + 1$ се повећавањем вредности промењиве x смањују вредности промењиве y. Према томе, функција је опадајућа. Линеарна функција $y = 2$ није ни растућа ни опадајућа.

а) б) в)



цртеж 5

Задатак 3

Дате су линеарне функције:
$y = -x + 1$, $y = 4x + 1$, $y = -3x$, $y = -2x + 3$, $y = 2x$ и $y = x + 2$.
а) Нацртај растуће функције у једном, а опадајуће функције у другом координатном систему.
б) Међу растућим линеарним функцијама, одреди која најбрже расте?
в) Међу опадајућим линеарним функцијама, одреди која најбрже расте?

Задатак 4

Дате су линеарне функције:

$y = -53x + 7$, $y = 8x + 19$, $y = -45$, $y = -50x + 23$, $y = 78x$, $y = x + 89$,
$y = -x + 95$, $y = 100x + 1$, $y = -325x$, $y = 25$, $y = x + 36$.

Напишите све функције које су:
а) растуће. Која најбрже расте? Зашто?
б) опадајуће. Која најбрже опада? Зашто?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. У истом координатном систему нацртај линеарне функције:

$y = x + 2, y = 5x - 3$ и $y = \frac{1}{4}x + 3$.

а) Да ли су функције растуће или опадајуће?

б) Која функција најбрже расте?

2. У истом координатном систему, нацртај линеарне функције: $y = -x + 1, y = -3x + 2$ и $y = -\frac{3}{4}x$.

а) Да ли се функције расту или опадају? б) Која функција најбрже опада?

3. Дате су линеарне функције:

$y = -3x + 5$, $y = 9x + 20$, $y = -75$, $y = -52x + 3$, $y = 87x$, $y = x + 9$,
$y = -x + 94$, $y = 50x + 3$, $y = -758x$, $y = 285$, $y = x + 96$.

Напиши све функције које су:

а) растуће. Која од њих најбрже расте? б) опадајуће. Који од њих најбрже опада?

4. Провери без цртања да ли ће функција бити растућа или опадајућа за:

а) Укупну цену вожње таксијем у зависности од броја пређених километара ако је почетна цена 50 денара, и 30 денара по сваком километру;

б) Количину воде у једном базену у зависности од времена, ако у базену има 8000 литара воде, а сваког сата се испразни по100 литара;

в) Износ који ће Азри остати у зависности од дана проведених на одмору, ако је понела 20 000 денара и планира да троши 1500 денара дневно;

г) Износ телефонског рачуна у зависности од трајања позива ако компанија наплаћује 200 денара за претплату и 2 денара по минуту разговора.

5. Температура у Охриду у 6 h ујутру је била −3 °C, а до подне је расла за 2 °C сваког сата.

а) Напиши линеарну функцију која изражава зависност температуре y (у Целзијусовим степенима) од времена x (у сатима).

б) Нацртај график линеарне функције.

в) Испитај да ли је линеарна функција растућа или опадајућа.

г) Одреди када ће температура бити 0 °C.

6. Марко има две понуде за посао у продавницама бицикала. У првој му се нуди 1000 денара дневно и 500 денара од сваког продатог бицикла, а у другој 1500 денара дневно и 200 денара од сваког продатог бицикла.

а) Напиши линеарну функцију која изражава зависност зарађеног износа новца y (у денарима) од времена x (у данима).

б) Објасни која је понуда повољнија у зависности од броја продатих бицикала.

7. Роса жели да запосли продавачицу у својој цвећари. Двоуми се да ли да јој понуди дневницу од 1200 денара и 40 денара од сваког продатог букета или 1500 денара и 20 денара од сваког продатог букета. Последњег месеца у цвећари се продавало по 30 букета дневно.

а) За колико продатих букета дневно су обе понуде подједнако повољне?

б) Која је понуда повољнија за Розу ако продаја остане на 30 букета дневно?

8. Град жели да подстакне употребу електричних тротинета за превоз до посла. Постоје две могућности за грађане:
Могућност А: Куповина сопственог електричног тротинета за 24.000 денара, уз додатни трошак за пуњење од 20 денара дневно.
Могућност Б: Изнајмљивање тротинета преко апликације за 150 денара дневно, без других трошкова.

а) Запиши линеарне функције које одређују зависност укупних трошкова C од броја дана коришћења x за обе могућности.
б) Нацртај њихове графике у истом координатном систему.
в) Пронађи после колико дана коришћења ће трошкови за две опције бити једнаки.
г) Објасни која је опција повољнија за краћи, а која за дужи период и зашто.
д) Предложи једноставну промену цена или услова која би учинила опцију Б приступачнијом грађанима.

Истраживање

Беким се пење уз тобоган према функцији y_1, а спушта према функцији y_2. (*цртеж* 6).
а) Колики је коефицијент правца k_1 функције y_1?
б) Колики је коефицијент правца k_2 функције y_2?
в) Које ће степенице за пењање бити стрмије: оне постављене према функцији $y = 2x + 5$ или оне постављене према функцији $y = 3x + 4$?
г) Да ли се део тобогана за спуштање може поставити према константној функцији?

Објасни одговор.



цртеж 6

16. ЗАПИСАЊЕ ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ ДАТЕ ГРАФИКОМ

Пресеци графика линеарне функције са координатним осама

Ако знамо формулу линеарне функције, можемо пронаћи тачке у којима њен график сече координатне осе. Исто тако, ако знамо тачке пресека са осама, можемо нацртати график функције и написати формулу те функције.

Активност

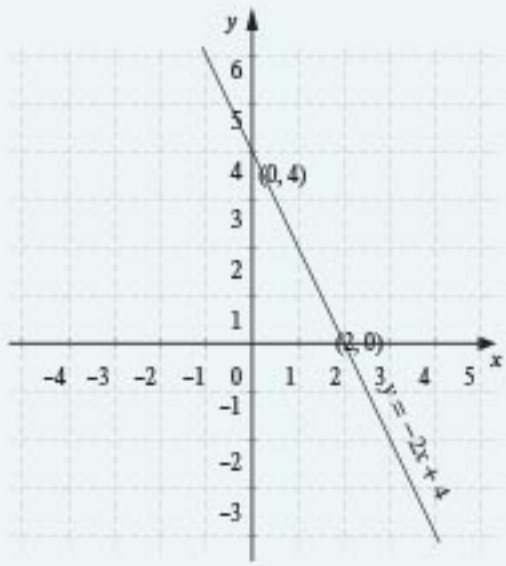
1. Којој координатној оси припада тачка: а) (1,0), б) (0,−2)?
2. Провери да ли тачке (1,0) и (0,−2) припадају графику линеарне функције $y = 2x - 2$.

Пример 1

Дата је функција $y = -2x + 4$.
а) Пронађи тачке пресека графика линеарне функције са координатним осама.
б) Пронађи нулу линеарне функције.
в) Нацртај график линеарне функције.

а) **Тачка пресека графика линеарне функције са *y*-осом** је тачка на графику линеарне функције за коју је x-координата једнака 0.
За $x = 0$, израчунавамо да је $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$.
Према томе, тачка (0, 4) је пресек са y-осом.
Тачка пресека линеарне функције са *x*-осом је тачка на графику линеарне функције за коју је y-координата једнака 0.
За $y = 0$, решавањем једначине $-2x + 4 = 0$, добијамо $x = 2$.
Према томе, тачка (2, 0) је тачка пресека графика са x-осом.
б) **Нулу линеарне функције** називамо вредност променљиве x за коју је вредност функције једнака нули 0.
Према томе, нула дате функције је $x = 2$.
в) График дате линеарне функције пролази кроз тачке (0, 4) и (2, 0) (*цртеж* 1).

x	0	2
y	4	0



цртеж 1

Задатак 1

Дата је линеарна функција $y = 10 - 5x$.

а) Нађи координате тачака пресека линеарне функције са координатним осама.

б) Пронађи нулу линеарне функције. в) Нацртај график линеарне функције.

Писање линеарне функције дате њеним графиком

Да бисмо графички представили линеарну функцију

$y = kx + n$,

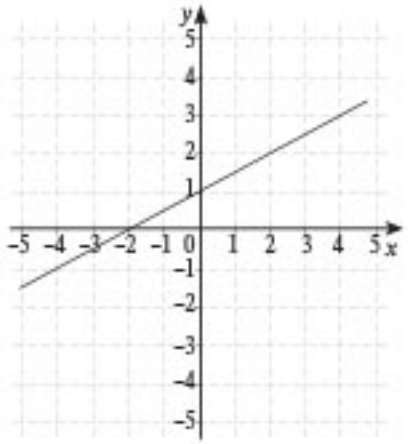
потребно је да пронађемо вредности коефицијента правца k и слободног члана n.

Истражићемо два начина да би пронашли њихове вредности из графика функције.

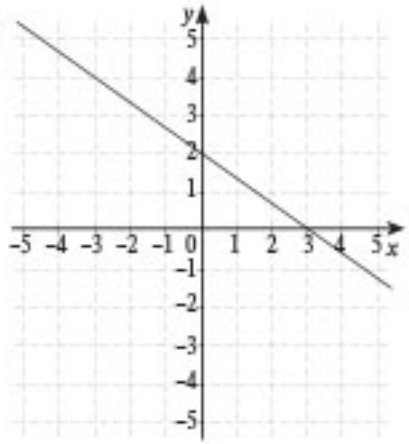
Пример 2

Напиши линеарну функцију $y = kx + n$ дату графиком на *цртежу* 2:

а)



б)



цртеж 2

Објаснимо први начин проналажења коефицијента и слободног члана.

а) **Први корак**. Примећујемо да график линеарне функције сече y – осу у тачки (0,1), тако да ће слободни члан бити $n = 1$. Ако заменимо $n = 1$ у формули $y = kx + n$, добијамо

$y = kx + 1$.

Други корак. Примећујемо да график линеарне функције сече x – осу у тачки $(-2, 0)$. Замењујемо њене координате у формулу $y = kx + 1$.

Одатле добијамо да

$$0 = k \cdot (-2) + 1,\ -1 = -2k,\quad = \frac{1}{2}.$$

Линеарна функција која одговара датом графику је $y = \frac{1}{2}x + 1$.

б) **Први корак**. График линеарне функције сече y – осу у тачки (0,2), па ће слободни члан бити $n = 2$. Ако заменимо $n = 2$ у формули $y = kx + n$, добијамо

$$y = kx + 2.$$

Други корак. График линеарне функције сече x – осу у тачки (3, 0).

Замењујемо њене координате у формулу $y = kx + 2$. Одавде добијамо да је

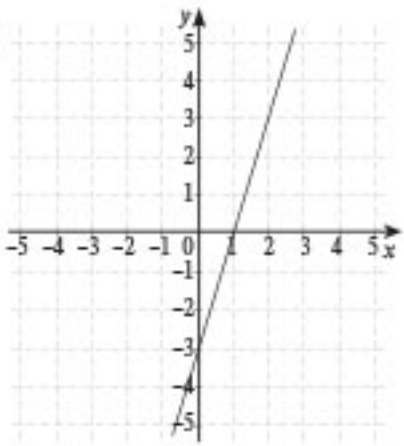
$$0 = k \cdot 3 + 2, \quad -2 = 3k, \quad k = -\frac{2}{3}.$$

Према датом графику добили смо линеарну функцију $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

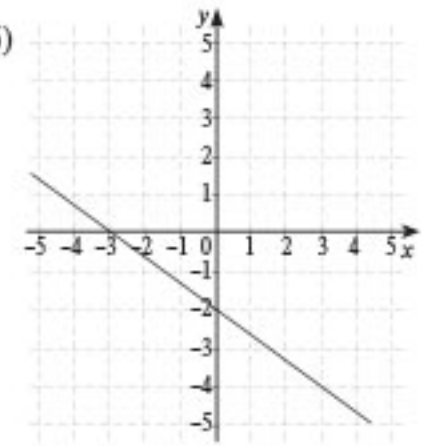
Задатак 2

Напиши линеарну функцију $y = kx + n$ дату графиком на цртежу 3:

а)



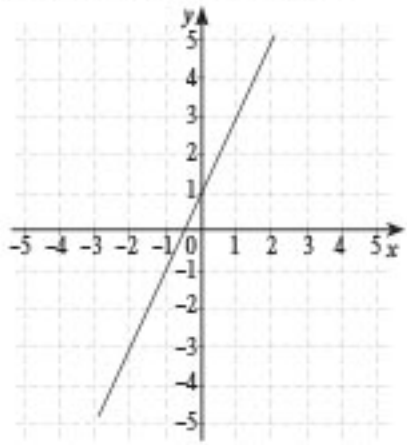
б)



цртеж 3

Пример 3

Напиши линеарну функцију са графика на *цртежу* 4.



цртеж 4

Према графику, састављамо табелу са вредностима за четири узастопна цела броја x.

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

+2 +2 +2

Видимо да правило за следећег члана низа вредности у гласи „додај 2“.
Зато, додајемо ред у табелу са удвострученим вредностима броја x.

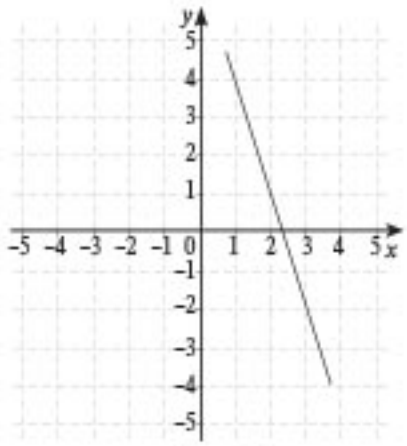
	x	1	2	3	4
·2	y	3	5	7	9
	$2x$	2	4	6	8

+1

Ако упоредимо вредности $2x$ са вредностима y, видимо да је свака вредност $2x$ увећана за 1 једнака одговарајућој вредности y.
Према томе, линеарна функција је $y = 2x + 1$.

Пример 4

Напиши линеарну функцију са графика на цртежу 5.



цртеж 5

Према графику, састављамо табелу вредности за четири узастопна цела броја x.

x	1	2	3	4
y	4	1	−2	−5

-3 -3 -3

Видимо да је правило за следећег члана низа вредности у „додај -3“.
Зато, у табелу додајемо ред вредности које су производ броја -3 и броја x.

	x	1	2	3	4
·(−3)	y	4	1	−2	−5
	$-3x$	−3	−6	−9	−12

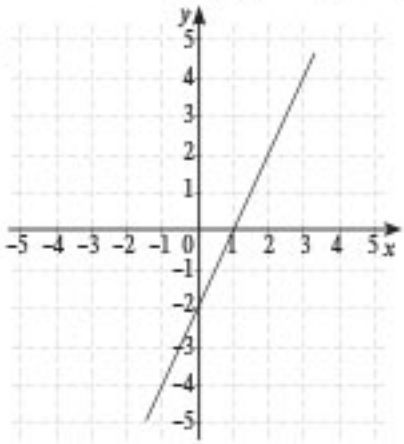
+7

Ако упоредимо вредности $-3x$ са вредностима y, видимо да је свака вредност $-3x$ увећана за 7 једнака одговарајућој вредности y.
Значи, линеарна функција је $y = -3x + 7$.

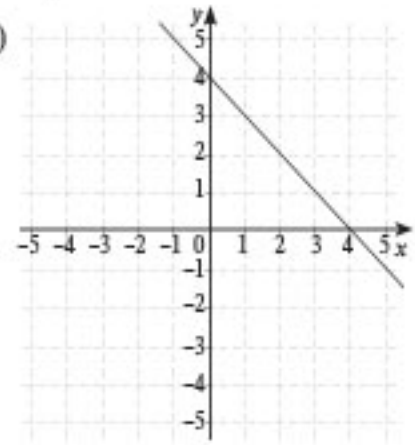
Задатак 3

Напиши линеарну функцију са графика на *цртежу* 6.

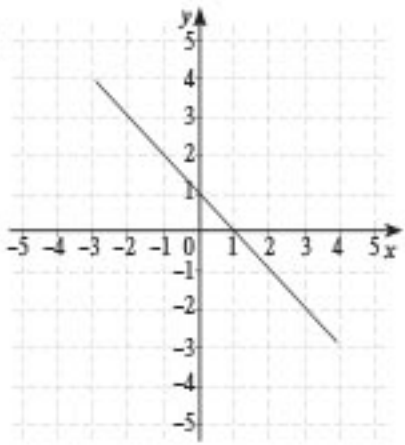
а)



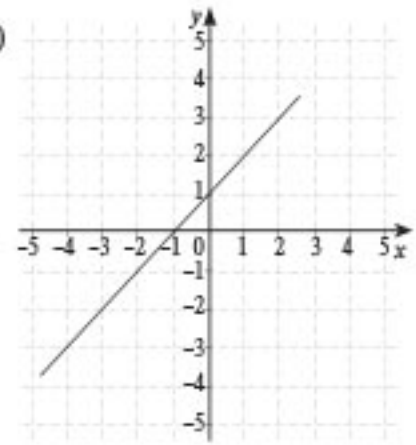
б)



в)



г)



цртеж 6

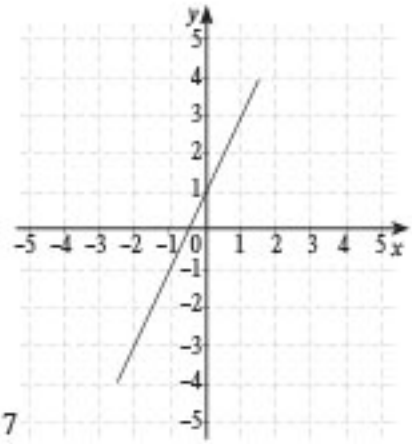
Пример 5

Марко вози бицикл узбрдо. График приказује промену надморске висине y (у метрима) од пређеног растојања x (у километрима).

а) Напиши линеарну функцију $y = kx + n$ дату графиком на *цртежу* 7.

б) Објасни значење коефицијента k и слободног члана n.

в) На којој ће висини бити Марко када пређе 2 km?



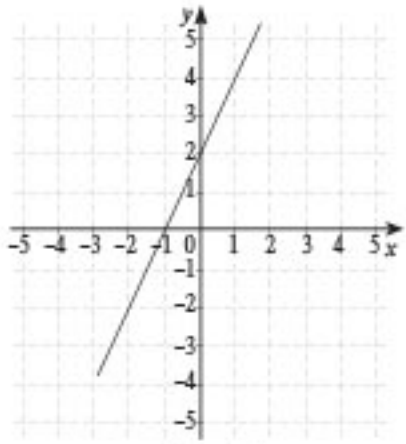
цртеж 7

а) Са графика примећујемо да права сече y – осу у тачки (0, 1),
што значи да је $n = 1$.
Поред тога, график пролази кроз тачку (1, 3) из које налазимо да је
$3 = k \cdot 1 + 1$, $k = 2$.
Значи, линеарна функција је $y = 2x + 1$.
б) Коефицијент $k = 2$ значи да се за сваки пређени 1 km надморска висина повећава за 2 m. Слободни члан $n = 1$ значи да када је Марко на почетку путање, односно када је $x = 0$, надморска висина путање је 1 m.
в) Вредност функције y $x = 2$ је $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ m. То значи да ће, када Марко пређе 2 km, бити на надморској висини од 5 m.

Напомена. Иако је графикон приказан за све вредности x, у контексту задатка, само део где је $x \geq 0$ има смисла, јер Марко не може да пређе „негативну удаљеност".

Задатак 4

Петар се пење планинском стазом.
График приказује зависност надморске висине y
(у метрима) од пређене удаљености x (у километрима).
а) Напиши линеарну функцију $y = kx + n$
дату графиком на *цртежу* 8.
б) Објасни значење коефицијента k и
слободног члана n.
в) На којој ће висини бити Петар
када пређе 2,5 km?
г) После колико километара ће Петар
бити на висини од 14 m?

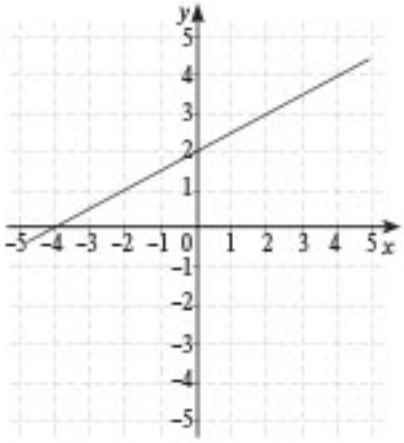


цртеж 8

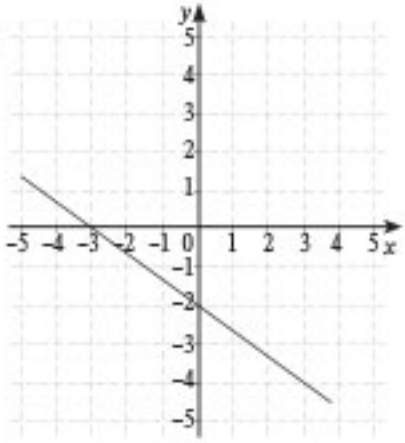
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пронађи тачке пресека са координатним осама графика линеарне функције:
а) $y = 2x + 5$, б) $y = -3x + 1$.
2. Нађи нулу линеарне функције: а) $y = x - 5$, б) $y = -x + 2$.
3. Нацртај график линеарне функције користећи њене тачке пресека са координатним осама: а) $y = -2x$, б) $y = -2x + \frac{1}{2}$, в) $y = \frac{3}{5}x - 3$.
4. Напиши линеарну функцију $y = kx + n$ дату графиком на *цртежу* 9.

а)



б)



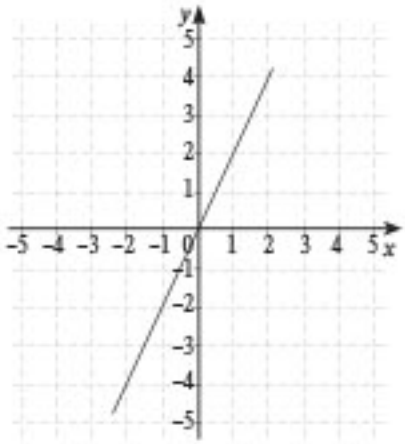
цртеж 9

5. Тачке пресека графика линеарне функције са координатним осама су:
а) (3, 0) и (0, 4), б) (−4, 0) и (2, 0).
Нацртај линеарну функцију и напиши њену формулу.

6. Нацртај линеарну функцију са нулом $x = 2$, која са x-осом захвата угао од 45°.
Напиши формулу функције са њеног графика.

7. Нацртај линеарну функцију са нулом у тачки $x = -1$, која са x-осом затвара угао од 135°.
Напиши формулу функције са њеног графика.

8. Јулија купује млеко у локалној продавници. Цена млека у (у денарима) зависи од количине млека (у литрима) које ће купити.
а) Напиши линеарну функцију $y = kx + n$ према графику на *цртежу* 10.
б) Објасни значење коефицијента k и слободног члана n.
в) Колико ће Јулија платити ако купи 3 литра млека?



цртеж 10

Истраживање

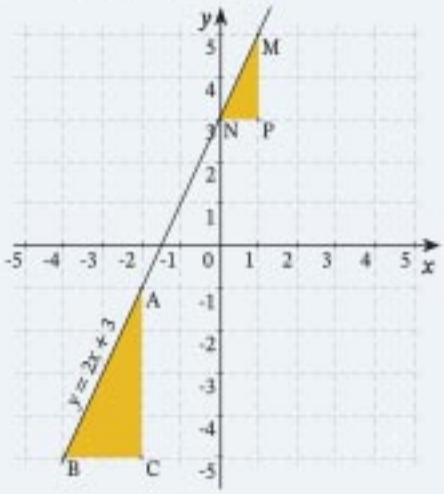
На *цртежу* 11 приказан је график линеарне функције $y = 2x + 3$. На правој су означене две произвољне тачке A и B, а затим и тачка C, тако да је ABC правоугли троугао са правим углом у темену C.

а) Према графику, израчунај количник дужине катете AC и дужине катете BC.

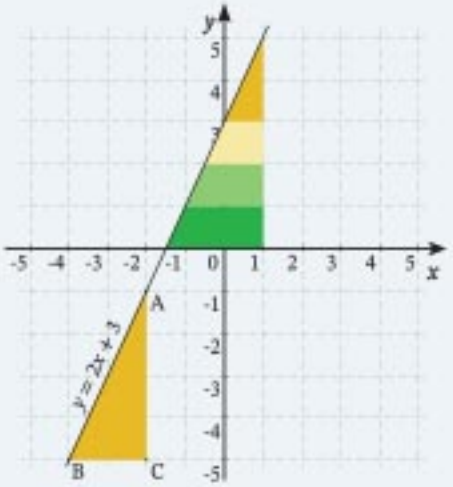
б) На исти начин израчунај количник дужине катете MP и дужине катете NP троугла MNP?

в) За сваки пар произвољних тачака на правој, цртањем линија паралелних са осама кроз обе тачке, добијамо правоугле троуглове (*цртеж* 12). Израчунај количник катете паралелне са y-осом и катете паралелне са x-осом у овим троугловима. Упореди га са коефицијентом дате линеарне функције. Шта закључујеш?

г) Како ће ти закључак помоћи у поступку писања линеарне функције $y = kx + n$ према датом графику?



цртеж 11



цртеж 12

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Сведи моном у нормалан облик:
а) xy^3x^2y, б) $6xy(-2x^4y)$, в) $-4xy^2(-5xy)$, г) $xyxyy4xy$.
Да ли постоје слични мономи?

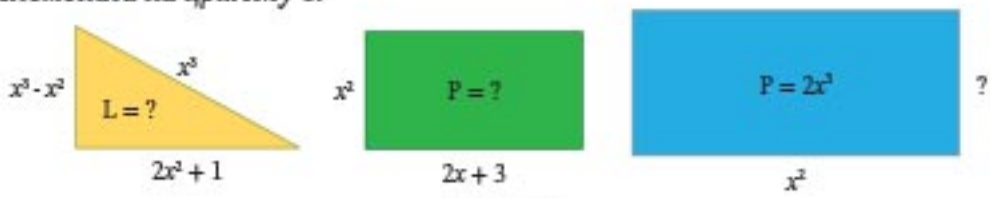
2. Ког је степена моном: а) x^3y^4, б) xy, в) $5x^2y^3z$, г) 3?

3. Од збира монома $-a^2b$ и $3a^2b$ одузми њихову разлику.

4. Нађи производ монома: а) $4x^3 \cdot x^4 \cdot 2x^4$, б) $a^2b \cdot (-2a^3b^2) \cdot 7ab^3$.

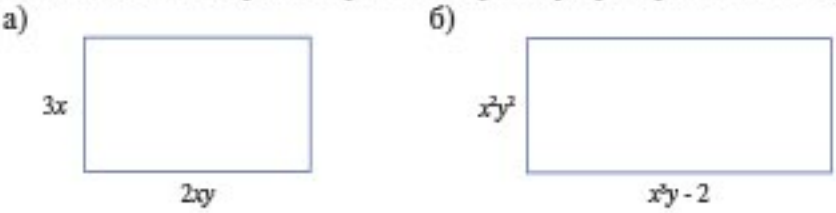
5. Нађи количник монома: а) $5x^3 : (-20x^2y^2)$, б) $27a^4 : 3a^3b$.

6. Напиши алгебарски израз којим ћеш изразити тражене величине преко датих елемената на *цртежу* 1:



цртеж 1

7. Напишите алгебарски израз за површину правоугаоника на *цртежу* 2.



цртеж 2

8. Напиши полином у нормалном облику, а затим одреди његов степен:
а) $3xy + x - 5xy + 1$, б) $7ab^2 - 4ab + 5ab + ab^2$,
в) $x^2 - (2x)^3 + xxx - x^2$, г) $2xy^3 + 5(xy)^2z - (3xy)^2z + 8xyy^2$.

9. Дати су полиноми $A = 6x^2 - 5x + 1$, $B = x^2 + 3x - 2$ и $C = x + 3$. Нађи полиноме:
а) $A + B + C$, б) $A - B$, в) $C + B - A$, г) $-A + B - C$.

10. Напиши полиноме у нормалном облику: а) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{5y}{6}+\frac{4x}{3}$, б) $\frac{2x}{7}+\frac{3y}{8}-\frac{3x}{2}+2x$.

11. Два аутомобила се крећу у истом смеру. Брзина првог аутомобила у функцији времена t дата је формулом $v_1 = 2{,}5t^2 + 0{,}5t + 10$, а брзина другог аутомобила у функцији времена t дата је формулом $v_2 = 1{,}5t^2 + 0{,}8t + 9{,}5$. Напиши алгебарски израз који представља разлику њихових брзина у зависности од времена t и поједностави га.

12. Изврши назначене операције:
а) $5x^2 + 2x(4x - 1)$, б) $x^2(3x^3 - 2x) - 4(x^3 + 1)$,
в) $(24y^6 + 18y^4) : (-6y^2) + 21y^5 : (-7y^3)$, г) $(5x^3 - x^2y) : x^2 + (30xy - 25y^2) : (-5y)$.

13. Ако је $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$ израчунај вредност израза:
а) $3(2x - y^2) + 4(yz + 1)$, б) $2(-x^3 + 1) - 3yz$,
в) $5(2x^2 - 3y) + 6x + 3(x - 2y^3) - 3xy$, г) $2(xy^2 - 4) + 3x^2y + 7(x + y) - 5xy$.

14. Нина продаје колачиће. У понедељак је продала 18. У уторак је продала 22 колачића, у среду је продала 26 колачића, итд.
а) Колико колачића је продала у суботу?
б) Колико колачића је укупно продала за недељу дана, знајући да Нина не ради у недељу?

15. Дат је низ са заједничким чланом $a_n = 7n + 1$. Нађи:
а) прва 3 члана, б) чланове са редним бројевима 300 и 458.

16. Одреди заједнички члан низа:
а) 12, 15, 18, ..., б) 5, 11, 17, ..., в) 28, 24, 20, ..., г) 14, 9, 4, ...

17. Нађи општи члан низа представљеног шемом на *цртежу* 3.



цртеж 3

18. Реши једначину: а) $x-\frac{2}{5}=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}$, б) $x-\frac{x}{4}-3=\frac{x}{6}-\frac{x}{3}+2$.

19. Реши једначину: а) $\frac{2}{3}(x-1)+4=\frac{x}{6}$, б) $\frac{1}{8}(2x+3)-\frac{1}{2}(x-1)=\frac{3}{4}$.

20. Реши једначину: а) $0,75x-0,25-\frac{2x}{3}=\frac{1}{3}-4x$, б) $1,25x-0,25-1,5x=x-1,5$.

21. Вредност половине износа који има Марија, умањен за 2500 денара, је исти као 1500 денара умањених за трећину износа. Колико денара Марија има?

22. Нађи мању страницу правоугаоника ако је она $\frac{1}{6}$ од веће странице и $\frac{1}{6}$ од обима.

23. Нацртај график линеарне функције: а) $y = 3x - 5$, б) $y = -x + 3$, в) $y = \frac{1}{3}x$.

24. Пронађи нулу линеарне функције: а) $y = -x - 4$, б) $y = \frac{x}{4} + 2$.

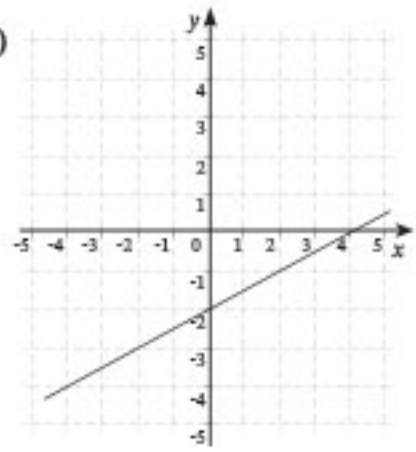
25. Дате су линеарне функције:
$y = -x + 6$, $y = 7x + 26$, $y = -46$, $y = -35x + 4$, $y = 9x$, $y = x + 1$,
$y = -x + 23$, $y = 54x + 43$, $y = -397x$, $y = 200$, $y = x + 100$.
Напиши све:
а) растуће функције. Која од њих најбрже расте? б) опадајуће функције. Која од њих најбрже опада?

26. Напиши линеарну функцију чији је график паралелан графику линеарне функције $y = 2x + 1$ и сече график линеарне функције $y = x + 3$ на y – оси.

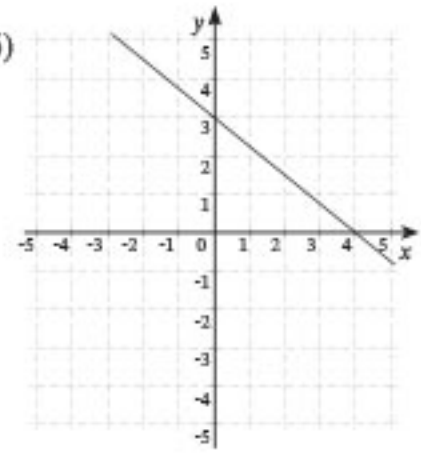
27. Нацртај график линеарне функције $y = -x + 2$, а затим одговори на следећа питања:
а) Колики је коефицијент правца? б) У којој тачки се његов график пресеца са y – осом?
в) Која је нула функције? г) Опиши ток функције,
д) Нађи вредност независне променљиве, ако је вредност функције 5,
ђ) Нађи вредност функције, ако независна променљива узима вредност -2.

28. Напиши линеарну функцију дату њеним графиком на *цртежу* 4:

а)



б)



цртеж 4

29. У компанији за изнајмљивање аутомобила А, дневна закупнина је 500 денара, и плаћа се додатних 40 денара по пређеном километру. У компанији Б, дневна закупнина је 400 денара, а плаћа се додатних 50 денара по пређеном километру.

а) Објасни у којој компанији је закуп повољнији у зависности од броја пређених километара.

б) У којој компанији је закуп повољнији за пут дуг 300 km?

в) Колико ће се уштедети ако се за пут од 500 km изабере повољнија понуда?

30. Соња жели да размножи нарцисе у својој башти. Уклониће новоформираних 5 луковица са сваког корена, а стару биљку ће задржати.

а) Напиши функцију за зависност броја нарциса након размножавања y од броја нарциса пре размножавања x.

б) Колико ће биљака Соња имати након размножавања 7 нарциса?

31. На *цртежу* 5 приказан је план стана, на којем су све дужине изражене у метрима.



цртеж 5

а) Према датом плану, састави израз у нормалном облику за:

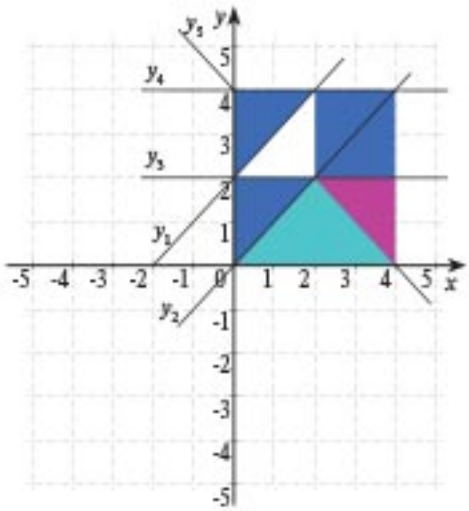
- Површину сваке од соба,
- Површину целог стана,
- Обим сваке од соба

б) Колико квадратних метара плочица је потребно за поплочавање пода на тераси, у купатилу и ходнику ако је $x = 0{,}4$?

в) Колико метара лајсни је потребно за под у спаваћој соби ако су отвори врата сваки 0,8?

г) Колико квадратних метара паркета је потребно за под у дневној соби и спаваћој соби ако је $x = 0{,}4$?

32. Напиши формуле линеарних функција: y_1, y_2, y_3, y_4 и y_5, које се користе за креирање слике на *цртежу* 6.



цртеж 6

33. У истом координатном систему, нацртај графике линеарних функција:

$y = 2x$, $y = -2x$, $y = x - 8$, $y = -x - 8$, $y = 2x - 8$, $y = -\frac{x}{2} - 2$ и $y = -\frac{x}{2} + 6$.

Изради уметнички цртеж тако што ћеш делове равни обухваћене нацртаним графиконима обојити различитим бојама.



Тема 4:

МЕРЕЊЕ

Резултати учења:

Проучавајући ову тему, оспособићеш се да:

- Користиш јединице мере за време при решавању проблема израчунавањем или графички.
- Изабираш одговарајуће јединице мере за мерење, процену, израчунавање и решавање проблема у различитим контекстима, укључујући јединице дужине, површине и запремине.

1. МЕРНЕ ЈЕДИНИЦЕ ЗА ВРЕМЕ

Активност

Мехмед трчи свако јутро 30 минута. Колико сати недељно трчи Мехмед?

Једна од најчешће коришћених јединица за мерење времена је дан. То је време које је потребно да се Земља једном окрене око своје осе.

Мање јединице за мерење времена су: **сат (h)**, **минут (min)** и **секунда (s)**. Веће јединице за мерење времена су: **недеља** (седмица), **месец**, **година**. Седмица је временски период који садржи 7 дана. Месец је временски период који садржи 28, 29, 30 или 31 дан, али при израчунавању претпостављамо да **месец има 30 дана**.

Година је време које је потребно да се Земља једном окрене око Сунца и износи 365 дана и 6 h. За лакше израчунавање, утврђено је да три године, једна за другом, имају 365 дана, а свака четврта година има 366 дана. Године које имају 365 дана називају се **обичне**, а година која има 366 дана назива се **преступна**. У преступној години, месец фебруар има 29 дана, док у обичним годинама има 28 дана. Приликом израчунавања узимамо да **година има 365 дана.**

Користе се и веће јединице мере од године, а то су: **деценија**, која има 10 година, **век** или **столеће**, који има 100 година, и **миленијум**, који има 1000 година. Година има 12 месеци или 52 недеље и 1 дан, а у преступним годинама 52 недеље и 2 дана. Приликом израчунавања узимамо да **година има 52 недеље**.

Време од једне **секунде** је основна јединица мере за време.

Подсетимо се да између јединица мере за време постоји следећи однос:

мерна јединица	веза са мањим мерним јединицама
секунда (s)	основна мерна јединица
минута (min)	1 min 60 s
час (h)	1 h = 60 = 3600 s
дан	1 дан = 24h = 1440 min = 86440 s
недеља	1 недеља 7 дана = 168 h = 10080 min = 604800 s
месец	1 месец се узима 30 дана у рачунању
година	1 година 12 месеци 365 дана
деценија	1 деценија = 10 година = 120 месеци = 3650 дана
век	1 век= 100 година
миленијум	1 миленијум = 10 века = 1000 година

Постоје и мање јединице мере од секунде, као што су десети део (десети део секунде), стотинка део (стоти део секунде) и хиљадити део (хиљадити део секунде). Оне се најчешће користе у спортским такмичењима.

Пример 1

Колико сати има у: а) 5 дана, б) 570 min, в) 1 месецу?

а) Један дан има 24 сата, па ће 5 дана имати $5 \cdot 24\ \text{h} = 120\ \text{h}$.
б) $570 = 9 \cdot 60 + 30 = 9\ \text{h}$ и $30\ \text{min}$.
в) Сматрамо да 1 месец има 30 дана, па је 1 месец $= 30 \cdot 24\ \text{h} = 720\ \text{h}$.

Пример 2

Колико минута има у: а) 1 дану и 3 h, б) 2700 s?

а) 1 ден и 3 h су $(24 + 3)\ \text{h} = 27\ \text{h} = 27 \cdot 60\ \text{min} = 1620\ \text{min}$, б) $2700 : 60 = 45\ \text{min}$.

Задатак 1

Колико минута има у: а) 2 дана и 2 сата, б) 3180 s?

Пример 3

Колико секунди има у: а) 5 h и 14 min, б) 3,5 h?

а) $5\ \text{h}$ и $14\ \text{min} = (5 \cdot 60 + 14)\ \text{min} = 314\ \text{min} = 314 \cdot 60\ \text{s} = 18840\ \text{s}$,
б) $3{,}5\ \text{h} = 3{,}5 \cdot 60\ \text{min} = 210\ \text{min} = 210 \cdot 60\ \text{s} = 12600\ \text{s}$.

Задатак 2

Колико секунди има у: а) 3 h и 27 min, б) 3,2 h?

Пример 4

Колико сати, минута и секунди има у 9256 s?

$1\ \text{min} = 60\ \text{s}$ и $1\ \text{h} = 60$ мин
Добијамо $9256\ \text{s} = 154\ \text{min}\ 16\ \text{s} = 2\ \text{h}$ и $34\ \text{min}\ 16\ \text{s}$.
Закључујемо да је $9256\ \text{s} = 2\ \text{h}$ и $34\ \text{min}\ 16\ \text{s}$.

Задатак 3

Колико сати, минута и секунди има у: а) 8410 s, б) 12568 s?

Пример 5

Сара има 14 година и 7 месеци. Њена мајка је 374 месеца старија од ње. Колико година има Сарина мајка?

Разлику у годинамаод 374 месеца претворићемо у године и месеце дељењем:

$$\begin{array}{r} 374 : 12 = 31 \\ -\ \underline{36} \\ \quad 14 \\ -\ \underline{12} \\ \quad 2 \end{array}$$

Према томе, мајка је 31 годину и 2 месеца старија од Саре.
Сарина мајка има $14 + 31 = 45$ година и $7 + 2 = 9$ месеци.

Задатак 4

Светски рекорд у маратону за жене, постављен 1963. године од стране Сједињених Држава, био је 3 сата 37 минута и 7 секунди. Актуелни светски рекорд, који је 2024. године поставила Кенија, побољшан је за 1 сат 27 минута и 13 секунди. Колики је нови светски рекорд у: а) сатима, минутима и секундама, б) секундама?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колико секунди има у: а) 15 h и 23 min, б) 6 h и 15 min и 35 s?
2. Колико сати и минута има у: а) 523 min, б) 1000 min?
3. Претвори у године: а) 3 века и 8 деценија, б) 1 миленијум, 6 векова и 4 деценије.
4. Шта је веће?
   а) 6 месеци или 3800 сати,
   б) 3 године и 2 месеца или 1500 дана,
   в) 7 сати и 43 минута и 450 минута,
   г) 5 сати 15 минута и 35 секунди или 200.000 секунди?
5. Поређај бројеве по величини, почевши од најмањег: 730 дана, 2 године, 90 недеља и 32 месеца.
6. Ника има 12 година, 3 месеца и 5 дана. Колико ће година, месеци и дана Ника имати после 85 месеци?
7. Ана и Ема заједно имају 358 месеци. Ана има 15 година и 4 месеца. Колико година има Ема?
8. У ТВ програму, филмски маратон је почео у 21:15 h и завршио се следећег дана у 6:45 h. Израчунај колико је минута трајао маратон.

Истраживање

Истражи на интернету времена колико трају година, месец и дан на неким другим небеским телима. Затим реши задатке. Користи калкулатор за израчунавање.

а) Ако са Марса кренеш на путовање ка Земљи, у летелици која се креће брже од земаљске летелице, стићи ћеш на Земљу за 2400 сати 180 минута и 360 секунди (мерено по земаљском времену). Претвори ово време у дане, сате и минуте.

б) Лина има 13 година, 5 месеци и 12 дана, мерено по земаљском времену. Колико година, месеци и дана има Лина, мерено по марсовском времену?

в) Марко има 14 година, 8 месеци и 22 дана, мерено по земаљском времену. Колико година, месеци и дана има Марко, мерено по сатурновском времену?

2. ГРАФИЦИ У ВРЕМЕНСКОМ КОНТЕКСТУ

График пут - време

Активност

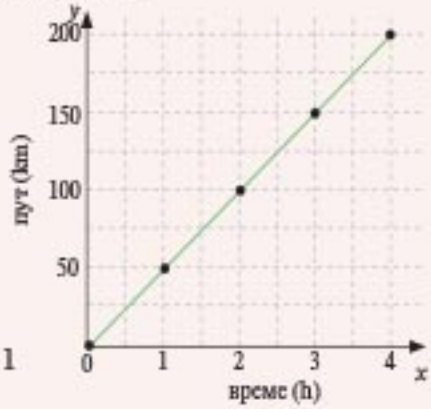
График на *цртежу* 1 приказује путовање аутомобила.

а) Колико је времена требало аутомобилу да пређе 100 километара?

б) Колико километара је аутомобил прешао за 3 сата?

в) Колико километара је аутомобил прешао за 1 сат?

г) Којом брзином се креће аутомобил?



цртеж 1

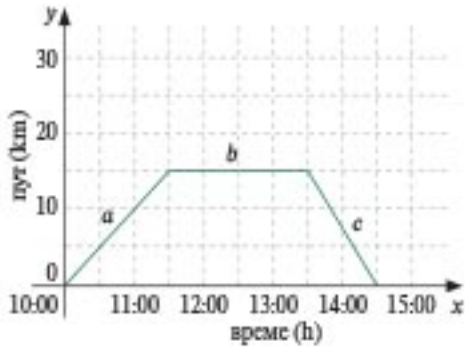
График пут - време представља зависност пређеног пута објекта од протеклог времена. График цртамо у координатном систему тако да је време представљено на x-оси, а растојање (пут) на y-оси.

График пута и времена нам помаже да направимо анализу кретања објеката и људи.
Наиме, из графика можемо да очитамо колико је неки објекат прешао за неки временски период, да ли је објекат у мировању, кретању, убрзавању или успоравању, а такође можемо да пронађемо брзину којом се објекат креће у одређеној фази.

Скенирај код и разгледај графикон кретања.

Пример 1

График на *цртежу* 2 представља Емино путовање бициклом до састанка и назад.
а) Колико је времена Ема путовала од куће до места састанка?
б) Колико је времена се задржала на састанку?
в) Када је Ема возила брже, на путу тамо или на повратку?
г) Колико брзо је путовала у свакој етапи?

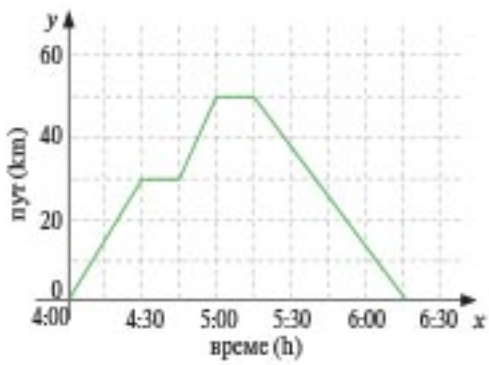


цртеж 2

а) Ема је кренула у 10:00 h и стигла у 11:30 h, што значи да је путовала сат и по.
б) Из графика видимо да је од 11:30 h до 13:30 h Ема на истој удаљености од куће. Дакле, остала је на састанку 2 сата.
в) Пут у одласку (етапу *a*) Ема је прешла за 1,5 h, а исти тај пут у повратку (етапу *b*) прешла је за 1 h, што значи да је при повратку возила брже.
г) У етапи *a* прешла је 15 km за 1,5 сат, што значи да је брзина $15 : 1{,}5 = 10$ km/h. У етапи брзина је 0 km/h (мировање), а у етапи *c* прешла је 15 км за 1 сат, па је брзина била 15 км/h.

Задатак 1

График на *цртежу* 3 приказује путовање таксија који преузима путника у 4:00, вози га до аеродрома у 5:00 сати и враћа се назад.
а) Колико је укупно километара возило прешло?
б) Колико је времена возило провело у мировању?



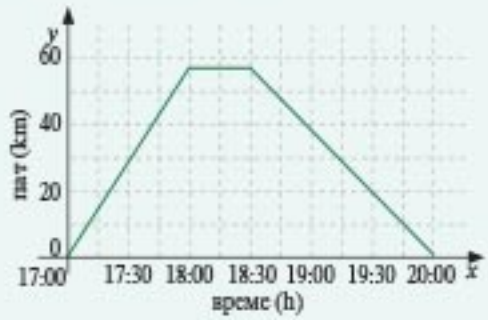
цртеж 3

в) Колико је времена возило провело у вожњи од почетне тачке до аеродрома?
г) У којој етапи путовања се возило кретало највећом брзином?

Пример 2

Марко је кренуо од куће у 17 часова. Возио је 1 сат, прешавши 58 километара до суседног града. Тамо је остао пола сата. Затим је кренуо назад и путовао 1,5 сат до куће. Нацртај график који представља Марково путовање.

На *цртежу* 4 приказан је график Марковог путовања.



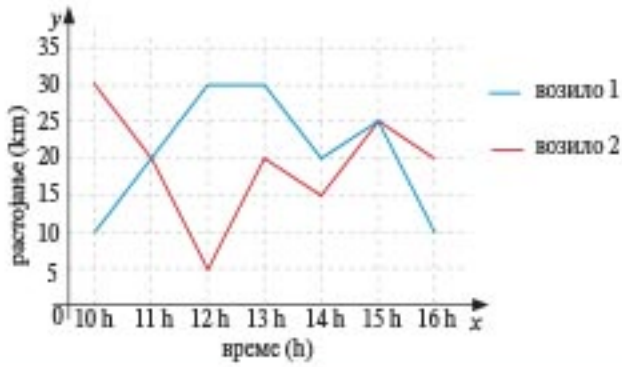
цртеж 4

Пример 3

На графику са *цртежа* 5 приказано је кретање два такси возила током шесточасовног рада, кроз њихову удаљеност од такси-станице.

а) Колико пута су током тих шест сати била на истој удаљености од станице? У колико сати?

б) Које возило је прешло већи пут током тих шест сати?



цртеж 5

а) Из графика видимо да се линије кретања возила секу на два места, што значи да ће у 11 часова и у 15 часова бити на истој удаљености од станице.

б) Возило 1 је прешло 20 km + 10 km + 5 km + 15 km = 50 km.
Возило 2 је прешло 10 km + 15 km + 15 km + 5 km + 10 km + 5 km = 60 km.

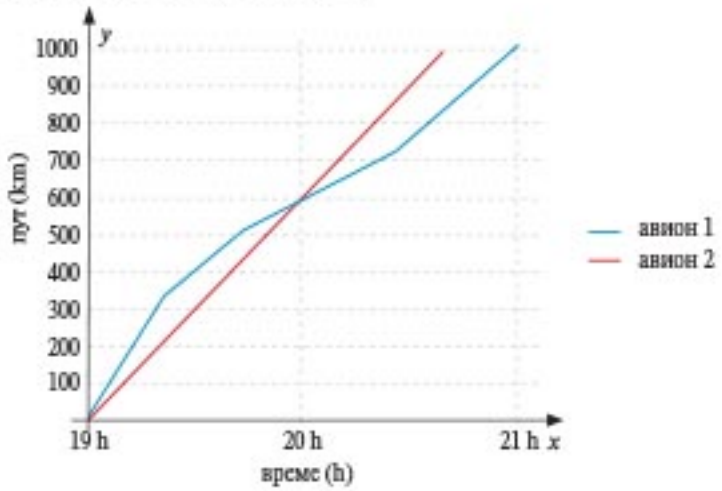
Задатак 2

На графику на *цртежу* 6 приказана је путања две авионске линије које полазе истовремено.

а) Колико пута су током лета биле на истој удаљености од аеродрома? У колико сати?

б) Који је од авиона стигао раније и за колико времена?

в) Који је авион прешао већи пут током свог лета?



цртеж 6

Други графици у временском контексту

Активност

Током времена, број становника на планети се повећава. Овај раст је приказан на *цртежу* 7.

а) За колико становника се светска популација повећала од 1800. до 2000. године?

б) За колико становника се светска популација повећала од 1800. до 1950. године?

в) У ком периоду је забележен највећи пораст становништва и за колико?



цртеж 7

Многе свакодневне активности, као и природне и друштвене појаве, одвијају се током различитих временских интервала.

Скенирај код и разгледај графиконе кретања.

При томе се величине које карактеришу активности и појаве мењају током времена. Ове промене описујемо креирањем графика зависности промене величине од протеклог времена.

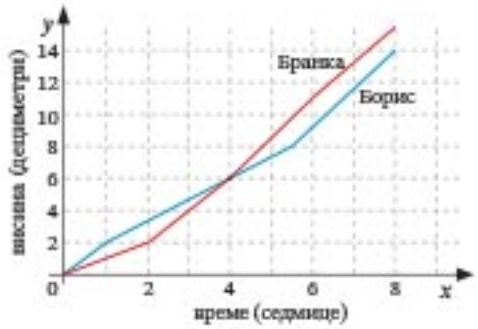
Пример4

Бранка и Борис саде парадајз у свом дворишту, свако у посебном делу баште. Бранка залива биљке 3 до 5 пута недељно, а Борис сматра да их треба заливати само 1 до 2 пута недељно. Свако од њих мери висину својих биљака. Графикон раста њиховог парадајза дат је на *цртежу* 8.

а) Ко је у праву у вези са заливањем? Шта закључујеш?

б) После колико времена су Бранкин и Борисов парадајз достигли исту висину?

в) У ком временском интервалу су Бранкини парадајзи били већи, а у ком Борисови?



цртеж 8

а) Бранка је у праву. Њене биљке су порасле више.

б) Примећујемо да се графици секу после 4 недеље. Значи, после 4 недеље Борисове и Бранкине биљке су биле исте висине.

в) Борисов парадајз је био виши у прве 4 недеље, а Бранкин парадајз у друге 4 недеље.

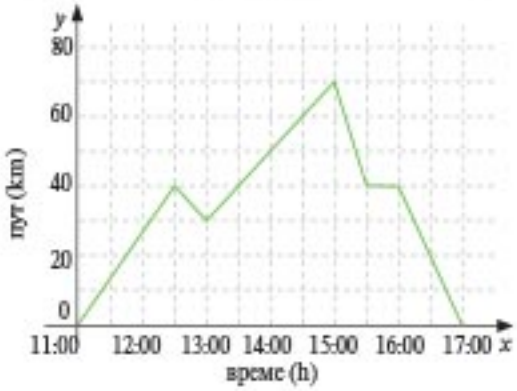
Задатак 3

Табела приказује просечне месечне температуре у Берову, Прилепу и Скопљу током периода од једне године. Нацртај график који представља промену температуре током првих 6 месеци у години.

	јануар	фебруар	март	април	мај	јуни
Берово	2	1	6	8	12	22
Прилеп	5	4	15	20	22	28
Скопље	8	4	18	23	25	29

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

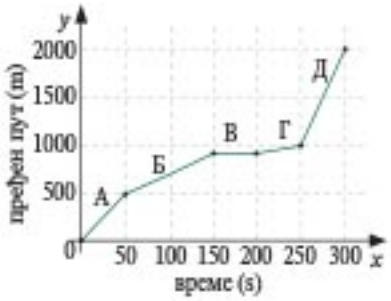
1. График на *цртежу* 9 приказује обилазак града туристичким аутобусом.



цртеж 9

а) Колико је километара аутобус укупно прешао?
б) Колико је трајала пауза?
в) Од колико до колико сати је аутобус путовао најбрже?
г) Којом брзином је путовао од 13:00 h до 15:00 h?

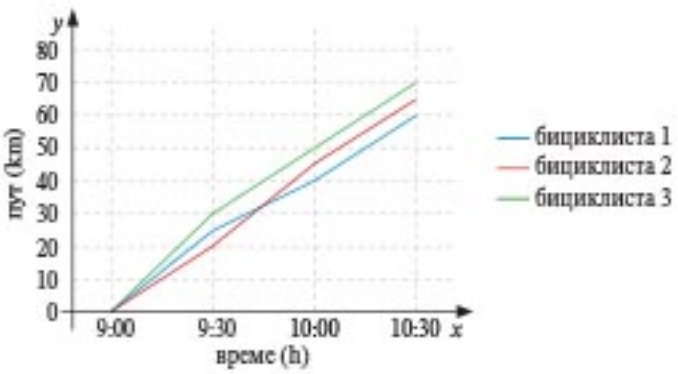
2. Бициклиста се пење уз брдо, а затим спушта. Његово кретање је подељено у 5 фаза: А – вожња по равном путу, Б – вожња узбрдо, В – одмор, Г – гурање бицикла и Г – спуштање, као што је приказано на графикону на слици 10:



цртеж 10

а) Колико минута је трајала вожња?
б) Колико је дуго бициклиста гурао бицикл?
в) Колики је пут прешао за 250 минута?
г) У којој етапи је прешао највећу удаљеност?
ђ) У којој етапи је бициклиста путовао најбрже?

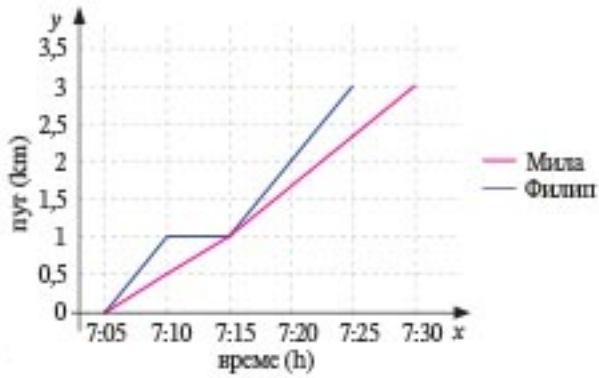
3. График на *цртежу* 11 приказује пут три бициклисте који су тренирали на брдској стази.



цртеж 11

а) Који је бициклиста возио најбрже у првих 30 минута?
б) Колики пут је прешао сваки бициклиста?
в) Ко је возио најспорије од 9:30 h до 10:00 h?

4. График на *цртежу* 12 приказује путовања Миле и Филипа од њихове куће до школе. *x*-оса је време (од 7:05 h до 7:30 h), а *y*-оса је удаљеност од куће (у километрима). Мила иде пешке, а Филип вози бицикл и успут свраћа у продавницу, а затим наставља.



цртеж 12

а) Ко је од њих први стигао у школу?
б) Колико је времена требало Мили да стигне до школе?
в) У колико сати је Филип свратио у продавницу и колико је дуго се тамо задржао?

5. Елена је кренула од куће у 8:00 h. Возила је 30 минута до свог радног места, које је удаљено 15 km. Остала је тамо до 13:30 h. Стигла је кући у 13:45 h. Нацртај графикон који представља Еленино путовање до посла.

6. Марина и Ирина су отишле на зимски одмор са својим породицама. Желеле су да припреме пројекат за школу, па су се договориле да записују податке о удаљености на којој се налазе од почетне тачке у одређеном временском периоду. Девојчице су прикупиле следеће податке:

Марина

време (h)	1	2	3	4	5	6
пут (km)	100	180	180	290	380	470

Ирина

време (h)	1	2	3	4	5	6
пут (km)	80	150	230	230	320	400

Нацртај графике путовања за обе девојчице у истом координатном систему и одговори:
а) У које време је Иринина породица направила паузу?
б) Чији се аутомобил кретао брже у последњем сату путовања?
в) Током које фазе путовања се Маринин аутомобил кретао најбрже?

7. У табели је дат број продатих сендвича и број продатих сокова у једној сендвичари током периода од једне недеље. Нацртај график зависности броја продатих сендвича и сокова од времена.

дан	понедељак	уторак	среда	четвртак	петак	субота	недеља
сендвичи	58	70	65	95	86	54	47
сокови	53	85	87	78	52	62	56

8. **Пројектни задатак**

Ученици осмог разреда из школе у Скопљу ићи ће на једнодневну едукативну и научну екскурзију у Штип. Планирано је да посете: штипски Безистен, тврђаву Исар, археолошко налазиште Баргала и градски музеј Штипа.

Треба планирати паузу за ручак. Направи временски план за путовање и представи га графиком. При томе:

1) Сазнај о временима поласка и повратка;
2) Истражи податке о удаљености Скопље-Штип, као и за локацију места која треба посетити и удаљеност између њих;
3) Израчунај колико ће времена бити потребно да се пређу удаљености између места по плану;
4) Испланирај редослед посета на основу истражених података о локацији и удаљености места;
5) Направи табелу са удаљеностима од Скопља до места која треба посетити и сату доласка сваког од њих;

	полазак	Безистен	Исар	ручак	Баргала	музеј
време						
удаљеност						

6) Прикажи графиком податке из табеле.

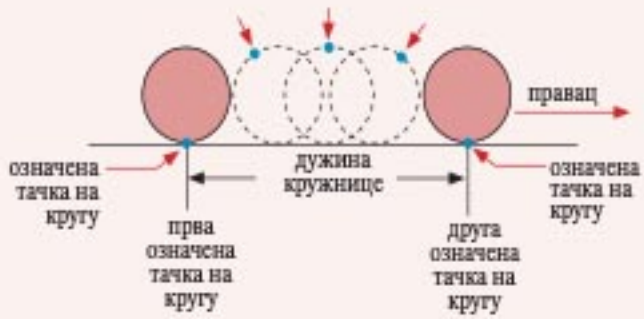
3. ДУЖИНА КРУЖНИЦЕ

Активност

За активност ће ти бити потребни: лењир, оловка, предмети из свакодневног живота цилиндричног облика као што су конзерва, новчић или шоља.
За почетак, пажљиво измери пречник кружнице изабраног предмета, означи једну тачку на тој кружници и на површини по којој ћеш померати предмет. На крају једног пуног обртаја, означи другу тачку на површини (као што је приказано на *цртежу* 1).

Скенирај код и сагледај обим кружнице.

Растојање од прве означене тачке на површини до друге означене тачке на површини је тачно једнако дужини кружнице. Понови експеримент са неколико различитих кружних предмета и попуни табелу. Упореди своје резултате са својим друговима из разреда. Шта примећујеш?



цртеж 1

кружни предмет	дужина кружнице	пречник кружнице	количник дужине и пречника
. . .			

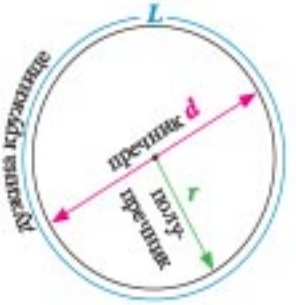
При извођењу активности, си сигурно приметио/ла да је количник дужине кружнице и његовог пречника приближно исти за сваку кружницу.
Количник дужине кружнице L и његовог пречника d је исти број за сваку кружницу и означен је грчким словом π (изговара се „пи“), $\frac{L}{d} = \pi$.

Дужина кружнице једнака је производу пречника круга и броја π.

Стога се дужина кружнице L израчунава помоћу формула:

$L = d\pi$ или $L = 2\pi r$,

где је d пречник кружнице, а r полупречник кружнице (*цртеж* 2). Број π је бесконачан непериодичан децимални број и назива се још и **Лудолфов број**. У почетку су научници, а касније и моћни рачунари, израчунавали његове децимале, али за практичну употребу користи се његова приближна вредност $\pi \approx 3{,}14$ или $\pi = \pi = \frac{22}{7}$.



цртеж 2

Ако кружницу посматрамо као границу круга, онда се њена дужина L сматра **обимом круга.**

Пример 1

Израчунај дужину кружнице, ако је: а) $r = 10{,}5$ cm, б) $d = 0{,}8$ m.

а) $L = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}5$ СМ $= 3{,}14 \cdot 21$ cm $= 65{,}94$ cm, б) $L = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 0{,}8$ m $= 2{,}512$ m.

Задатак 1

Израчунај дужину кружнице, ако је: а) $r = 2{,}3$ m, б) $d = 7\frac{2}{5}$ m.

Задатак 2

Ана и Марко трче у парку на кружној стази полупречника 14m.

а) Израчунај дужину стазе којом трче.

б) Колико метара ће укупно свако од њих претрчати ако трче 3 круга?

Активност

Како можеш помоћу формуле:

а) $L = d\pi$ израчунати пречник круга?

б) $L = 2\pi r$ израчунати полупречник круга?

Пример 2

Челична трака дужине 1 mје савијена у круницу. Колики је пречник кружнице?

Пречник кружнице је $d = \frac{L}{\pi} \approx \frac{1\text{m}}{3{,}14} \approx 0{,}32$ m.

Пример 3

Израчунај полупречник кружнице чији је обим $4{,}5\pi$ cm.

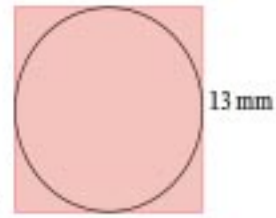
Полупречник кружнице је $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = \frac{4{,}5\,\text{cm}}{2} = 2{,}25\,\text{cm}.$

Задатак 3

У парку је планирана изградња кружне цветне баште. Дужина ограде која ће ограђивати цветну башту треба да буде 31,4 m. Колики треба да буде полупречник цветне баште?

Пример 4

Мали украс за накит има облик квадрата са страном $a = 13$ mm (*цртеж* 3). Унутар квадрата треба поставити жицу у облику кружнице која додирује странице тог квадрата. Колико милиметара жице је потребно за израду украса?



цртеж 3

Из услова у задатку за пречник кружнице, налазимо да је $d = a = 13$ mm.
Израчунавамо дужину кружнице

$L = d \cdot \pi \approx 13\,\text{mm} \cdot 3{,}14 = 40{,}82\,\text{mm}.$

Према томе, дужина жице је 40,82 mm.

Задатак 4

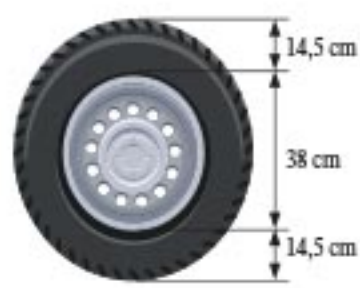
Око квадратне цветне леје сеје се трава као на *цртежу* 4. Израчунај дужину заштитне ограде око круга, ако је дијагонала квадратне леје 2,5 m.



цртеж 4

Задатак 5

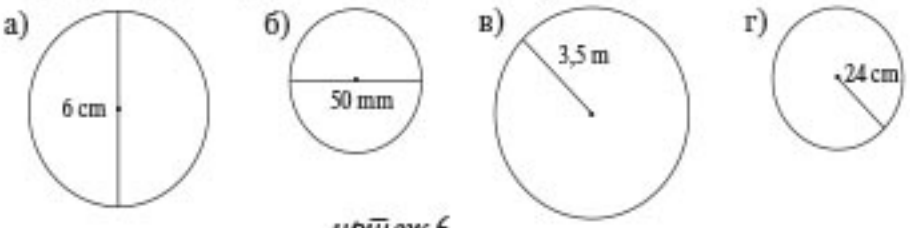
Димензије аутомобилског точка дате су на *цртежу* 5. Заокружи на најближи метар пут који ће бицикло прећи ако направи15 обртаја?



цртеж 5

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај дужину кружница датих на *цртежу* 6.



цртеж 6

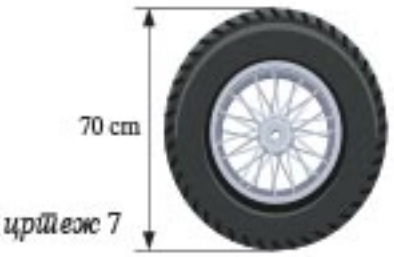
2. Прецртај табелу у свесци и допуни је потребним димензијама за кружницу:

r	5 cm	8 mm				
d			1 m	6 dm		
L					25,12 cm	3π dm

3. Ученици у научној лабораторији праве сунчани сат. Хтели би да поставе металну жицу око сата полупречника 20 cm. Колико метара металне жице ће им бити потребно?

4. Научници планирају да лансирају сателит који ће се кретати око Земље у кружној орбити на висини од 500 km изнад Земљине површине. Полупречник Земље је приближно 6371 km.
   а) Израчунај полупречник орбите сателита.
   б) Израчунај дужину орбите у којој ће се сателит кретати.

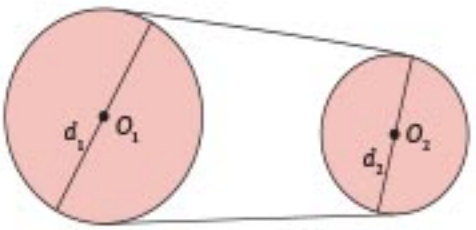
5. Аутомобилска гума има пречник од 70 cm (*цртеж* 7).
   а) Израчунај њен обим.
   б) Колико километара ће прећи ако направи 20.000 пуних обртаја?
   в) Колико пута ће се точак окренути ако возило пређе растојање од 45 km?



цртеж 7

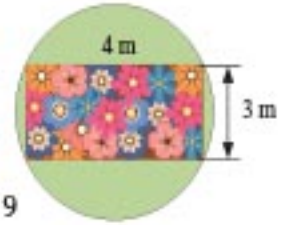
6. Новоизграђени кружни школски базен за активности има обим од 94,2 m.
   Израчунај пречник базена.

7. Два зупчаника на машини имају пречнике $d_1 = 60$ cm и $d_2 = 45$ cm и повезани су каишем (*цртеж* 8). Већи зупчаник се окреће помоћу мотора тако да направи 180 обртаја за 1 минут, и преко каиша, ротација већег зупчаника такође окреће мањи зупчаник. Колико обртаја у минуту ће направити мањи зупчаник?



цртеж 8

8. Травњак са кружним обликом је постављен око правоугаоне цветне леје (*цртеж* 9). Травњак треба да буде ограђен са 2 реда заштитне траке. Колика је дужина траке потребна за ограђивање травњака ако су странице правоугаоне цветне леје 3 m и 4 m?



цртеж 9

9. Два идентична точка су постављена на правој стази тако да су им центри удаљени 9,31 m (*цртеж* 10). Полупречник сваког точка је 3,5 cm. Точкови се истовремено крећу један према другом и направе 1 потпуни обрт за 1 секунду. После колико времена ће се сударити? Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.



цртеж 10

Истраживање

1. Направи летак о броју π у који ћеш унети занимљиве чињенице из историје математике о овом броју и његовом значењу.



слика 1

2. Мерни точак (*цртеж* 1) је инструмент који се користи замерење растојања. Састоји се од точка, дршке и уређаја који броји број потпуних обртаја точка.
Обезбеди мерни точак обима 1 m. Израчунај полупречник точка, а затим провери свој прорачун мерењем.
Користи мерни точак за мерење растојања, на пример у школском дворишту, спортском игралишту или дужину ограде око школе.
Колика би била грешка у мерењу километра ако би твој мерни точак имао полупречник који је мањи за: а) 1 cm, б) 1 mm, ц) 0,1 mm?

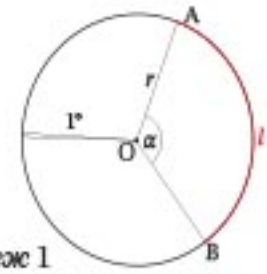
4. ДУЖИНА КРУЖНОГ ЛУКА

Активност

Нацртај три аналогна сата са бројевима од 1 до 12 на кружници. Означи лук на кружници који приказује путању коју прелази врх мале казаљке на:
а) првом сату од 16:00 h до 22:00 h,
б) другом сату од 12:00 h до 16:00 h,
в) трећем сату од 12:00 h до 15:00 h.
За сваки од следећих случајева, одреди колики део круга заузима лук и колико степени има одговарајући централни угао?

Израчунајмо дужину l кружног лука $\overset{\frown}{AB}$ са полупречником r, ако је одговарајући централни угао угао α (*цртеж* 1).
Централни угао од 1° одговара кружном луку чија ће дужина бити $\frac{1}{360}$ дужине кружнице, односно

$$l_{1^\circ} = \frac{1}{360} \cdot L = \frac{L}{360} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{2\pi r \cdot 1^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ}.$$



цртеж 1

Централни угао од 2° одговара кружном два пута дужем луку од претходног, односно

$$l_{2^\circ} = \frac{\pi r \cdot 1^\circ}{180^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r \cdot 2^\circ}{180^\circ}, \text{ итн.}$$

На тај начин, закључујемо да централни угао α одговара кружном луку дужине:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

У кружници са полупречником r, дужином кружног лука l који одговара централном углу α, израчунава се формулом:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}.$$

Пример 1

Израчунај дужину кружног лука кружнице полупречника 12 cm, који одговара централном углу $\alpha = 18^\circ$.

Према формули за израчунавање дужине кружног лука, налазимо да је:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \approx \frac{3{,}14 \cdot 12\,\text{cm} \cdot 18^\circ}{180^\circ} = 3{,}768\ \text{cm}.$$

Задатак 1

Израчунај дужину кружног лука који одговара централнм углу од 140° у кружници са полупречником од 3,2 dm.

Задатак 2

Израчунај дужине кружних лукова две концентричне кружнице са полупречницима $r_1 = 3$ cm и $r_2 = 5$ cm, који одговарају истом централном углу $\alpha = 122^\circ\ 30'$.

Задатак 3

Марко би хтео да постави жичану ограду око мале баште у облику круга са полупречником од 4 m. Колико метара жице Марко треба да купи ако жели да ограда буде половина од кружнице?

Активност

Како можеш из формуле $l = \frac{\pi r \alpha}{180°}$ да израчунаш:

а) полупречник r, са заданим l и α, б) централни угао α, са датим r и l?

Пример 2

Израчунај полупречник кружнице у коме кружни лук дужине $l = 11$ cm одговара централном углу $\alpha = 42° 30'$.

Дати централни угао потребно је претворити у степене: $\alpha = 42° 30' = 42{,}5°$.
Из формуле за израчунавање дужине кружног лука, налазимо да полупречник круга износи:

$$r = \frac{180° \cdot l}{\pi \alpha} \approx \frac{180° \cdot 11\text{cm} \cdot 7}{22 \cdot 42{,}5°} = 14{,}8 \text{ cm}, \text{ где је } \frac{1}{\pi} \text{ записано као } \frac{7}{22}.$$

Задатак 4

Анђела жели да направи стазу у дворишту која је део кружнице. Дужина стазе је 15 m, а централни угао кружнице који стаза опсеже је 120°. Колики је полупречник кружнице који формира стазу?

Пример 3

Јован поставља кружну рампу за бицикле. Дужина кружног лука рампе је 8 m, а полупречник кружнице чији је рампа део је 5 m. Колики је централни угао α кругжнице чији је рампа део?

Према формули за израчунавање дужине кружног лука, налазимо да је централни угао α кружнице, чији је део рампа, износи:

$$\alpha = \frac{180° \cdot l}{\pi r} \approx \frac{180° \cdot 8\text{m}}{3{,}14 \cdot 5\text{m}} = 91{,}7°.$$

Задатак 5

Израчунај централни угао у кружници полупречника 10 cm, ако је дужина кружног лука који одговара том углу 6,28 cm.

Пример 4

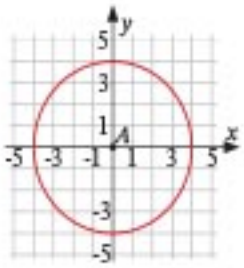
Без коришћења формуле за дужину кружног лука, одреди дужину круга у коме централни угао од 40° одговара кружном луку дужине 6 dm.

Пошто је $\alpha = 40° = \frac{1}{9} \cdot 360°$, дужина круга је $L = 9 \cdot l = 6\ \text{dm} \cdot 9 = 54\ \text{dm}$.

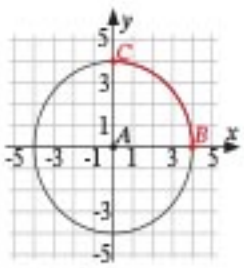
Задатак 6

Израчунај дужину кружног лука означеног црвеном бојом на *цртежу* 2.

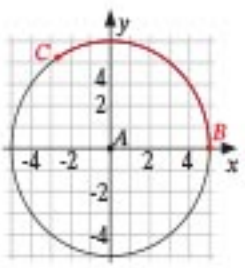
а) Цели круг



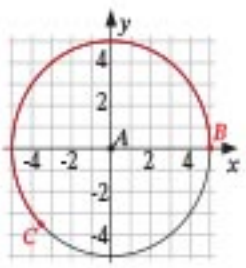
б) Четвртина круга



в) Трећина круга



г) Пет осмина круга



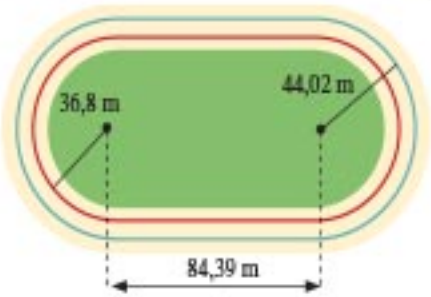
цртеж 2

Пример 5

Два тркача трче на атлетској стази - један на плавој, а други на црвеној стази. Углови који одговарају кружним луковима су по 180°, а полупречници кругова за сваког тркача дати су на *цртежу* 3.

а) Колико растојање сваки тркач пређе ако претрчи један круг на стази?

б) Заокружи на најближи метар разлику међу истрчаним дужинама.



цртеж 3

Стаза сваког тркача састоји се од 2 праве стазе и 2 полукружне стазе.

Црвена стаза је дугачка $2 \cdot 84{,}39\ \text{m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 36{,}8\ \text{m}) \approx 399{,}88\ \text{m}$.

Плава стаза је дугачка $2 \cdot 84{,}39\ \text{m} + 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 44{,}02\ \text{m}) \approx 445{,}23\ \text{m}$.

Разлика између дужине плаве стазе и дужине црвене стазе, заокружена на најближи метар, износи:

$445{,}23\ \text{m} - 399{,}88\ \text{m} = 45{,}35\ \text{м} \approx 45\ \text{m}$.

Задатак 8

Матеј треба да засади и огради башту у облику три четвртине круга у углу своје куће (*цртеж* 1). Ограда је дугачка 38 m. Колики треба да буде полупречник баште да би могао да огради целу башту? Заокружи резултат на најближи цео број метара.



слика 1

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај:
   а) дужину кружног лука у кружници са полупречником $r = 12$ cm и одговарајућим централним углом $\alpha = 120°$,
   б) дужину кружног лука у кружници пречника $d = 8$ cm и одговарајућим централним углом $\alpha = 22° 30'$,
   в) централни угао који одговара кружном луку дужине $l = 3{,}14$ cm и полупречником кружнице $r = 2$ cm,
   г) полупречник кружнице у коме централни угао $\alpha = 108°$ одговара кружном луку дужине $l = 9{,}42$ cm.

2. Истраживачи су картографисали комад леда који представља једну осмину кружне поларне ледене површине полупречника 1000 km. Колика је дужина закривљеног дела тог комада леда?

3. Колика је дужина кружног лука чији је одговарајући централни угао 135° у кружници дужине 6,8 cm?

4. Колики је полупречник Земље, ако је дужина Земљиног меридијана приближно 40.000 km?

5. На часу биологије, ученици уче о облику крвних судова. Измерили су део кривине великог артеријског лука и утврдили да је његова дужина 12 cm, а централни угао који одговара луку је 90°. Колики је полупречник кружнице чији је део кривине артерије?

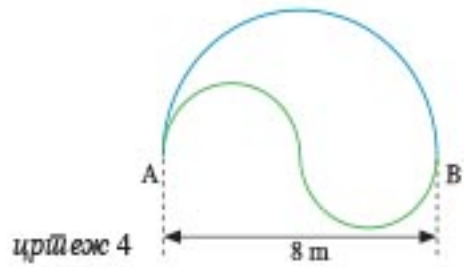
6. Тобоган на дечјем игралишту има кружну кривину са дужином лука од 12 m и централним углом од 120°. Колики је полупречник кривине?

7. Јован поставља ограду око кружне цветне баште. Он је измерио да је дужина кружног лука који одговара централном углу од 60°једнака 5,24 метра. Колико метара ограде је потребно да би се оградила цела башта?

8. Колики је централни угао који одговара кружном луку чија је дужина једнака полупречнику круга?

9. Који је краћа стаза од A до B на *цртежу* 4, плава или зелена стаза?

10. Периферни угао од 36° захвата кружни лук дужине 2,5 m. Одреди обим круга.

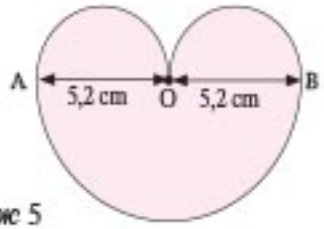


цртеж 4

11. Дужина Земљиног меридијана је 40003,423 km. Израчунај дужину лука који одговара: а) 1°, б) 1′.
(Дужина лука Земљиног меридијана који одговара 1′ назива се **наутичка миља**).

12. Метална трака је савијена у облику кружнице полупречника 4 cm. За потребе лимарске радионице, та трака је отворена у кружни лук полупречника 10 cm. Колики је централни угао који одговара добијеном кружном луку?

13. Честитка је састављена од три полукруга, при чему је O, центар великог полукруга (цртеж 5).Сара жели да украси растојање око честитке траком. Колико траке јој је потребно? Заокружи одговор на најближи центиметар.



цртеж 5

Истраживање

Пре више од 2000 година, грчки научник Ератостен је проценио обим Земље, претпостављајући да су сунчеви зраци паралелни. У подне за време летње дугодневице, у Сијени (данашњи Асуан) Сунце је падало вертикално (без сенке у бунару), док је у Александрији вертикални штап бацао сенку под углом од 7,2° (*цртеж* 6). Растојање по меридијану од Сијене до Александрије је око 5000 стадија („стадиј" је стара египатска мера за дужину).

а) Колики је централни угао α између градова?

б) Објасни како је Ератостен проценио обим Земље.

в) Процени обим Земље у стадијима.

г) Ако је 1 стадиј = 157,5 m, израчунај колики је обим Земље у километрима.



цртеж 6

5. ПЕРИМЕТАР (ОБИМ) СЛОЖЕНИХ 2Д ОБЛИКА

Активност

Фарма у облику правоугаоника са димензијама 400 m и 350 m ограђена је са 4 реда жице (слика 1).

Израчунај:

а) обим фарме,

б) укупну дужину жице за ограђивање,

в) колико кошта жица за ограђивање ако је цена 140 денара по метру.

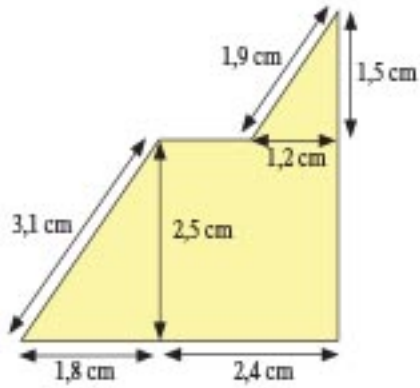


слика 1

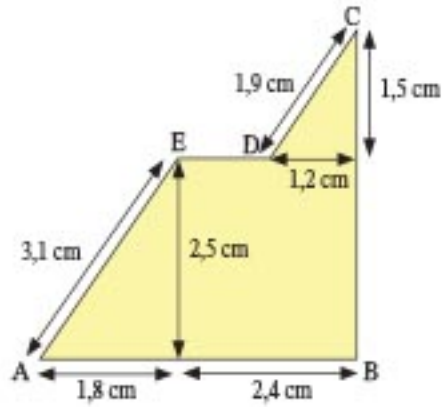
Често у свакодневном животу постоји потреба за израчунавањем збира дужина једноставних или сложених 2Д облика. У том случају, обраћамо пажњу на то од којих 2Д облика или њихових делова је састављен сложени 2Д облик и користимо већ познате формуле за израчунавање обима.

Пример 1

Израчунај обим сложеног 2Д облика приказаног на *цртежу* 1.



цртеж 1



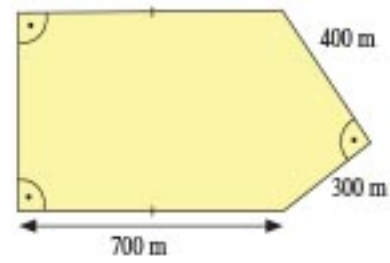
цртеж 2

Према цртежу 2 налазимо да је $\overline{DE} = 2{,}4\text{ m} - 1{,}2\text{ m} = 1{,}2\text{ m}$.
Обим је збир дужина страница сложеног 2D облика:

$$L = 1{,}5\text{ m} + 1{,}9\text{ m} + 1{,}2\text{ m} + 3{,}1\text{ m} + 1{,}8\text{ m} + 2{,}4\text{ m} + 2{,}5\text{ m} = 14{,}4\text{ m}.$$

Задатак 1

Константин трчи око оближњег тржног центра ујутру.
Његове димензије су дате на *цртежу* 3.
Колико пута мора да обиђе тржни центар да би претрчао укупно 13 km?



цртеж 3

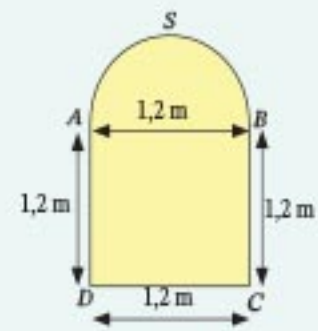
Пример 2

На *цртежу* 4 приказан је прозор који се састоји од квадрата и полукруга. Израчунај његов обим.

Обим прозора је збир дужина страница *AD*, *DC* и *BC* и дужина полукружнице *ASB*.
Пошто $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{DC} = 1{,}2\text{ m}$
а полукруг има пречник 1,2m, добијамо да

$$L = 3 \cdot \overline{AD} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \pi \approx 3 \cdot 1{,}2\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}2\text{ m} \cdot 3{,}14 =$$

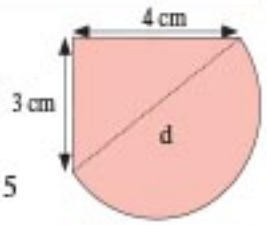
$$= 3{,}6\text{ m} + 1{,}884\text{ m} = 5{,}484\text{ m}.$$



цртеж 4

Пример 3

Привезак приказан на *цртежу* 5 треба да буде обрубљен златном жицом. Израчунај дужину златне жице која треба да се употреби.



цртеж 5

Привезак је састављен од правоуглог троугла и полукружнице. Пречник кружнице је

$$d=\sqrt{(3\text{cm})^2+(4\text{cm})^2}=\sqrt{9\text{cm}^2+16\text{cm}^2}=\sqrt{25\text{cm}^2}=5\text{cm}.$$

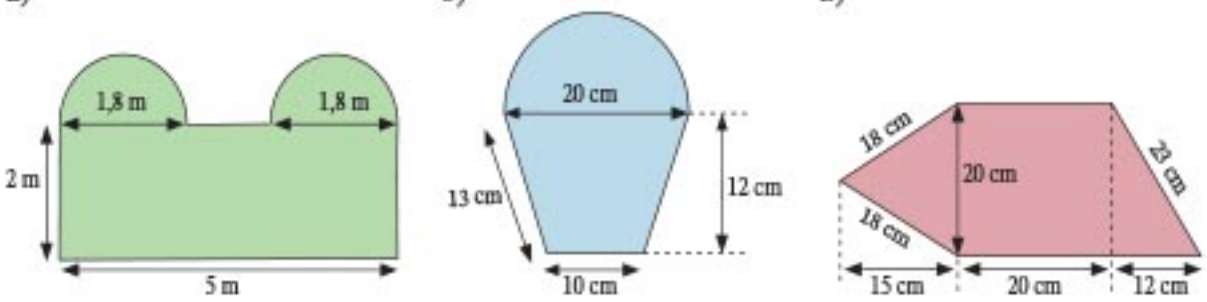
Обим привеска је збир дужина катета правоуглог троугла и полуобима круга:

$$L\approx 3\text{cm}+4\text{cm}+\frac{5\text{cm}\cdot 3{,}14}{2}=14{,}85\ \text{cm}\approx 15\ \text{cm}.$$

Задатак 2

Израчунај обим дводимензионалних облика датих на *цртежу* 6.

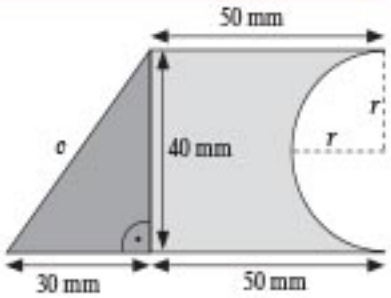
а) б) в)



цртеж 6

Задатак 3

Израчунај обим машинског елемента датог на *цртежу* 7.



цртеж 7

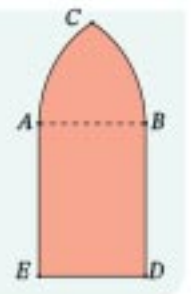
Пример 4

Колика дужина ПВЦ профила ће бити потребна да би се направио прозор облика као на *цртежу* 8. Тачке A, B и C су темена једнакостраничног троугла, A је центар кружног лука $\overset{\frown}{BC}$, B је центар кружног лука $\overset{\frown}{AC}$, $\overline{ED}=0{,}5$ m и $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}$.

Пошто су A, B и C темена једнакостраничног троугла, кружни лукови захватају углове од 60°, ($\alpha=60°$, $r=\overline{AB}=0{,}5$ m, $\overline{BD}=2\cdot\overline{ED}=2\cdot 0{,}5=1$ m).
Обим фигуре је:

$$L\approx 1+0{,}5+1\text{m}+2\cdot\frac{0{,}5\text{m}\cdot 60°\cdot 3{,}14}{180°}=2{,}5\text{m}+2\cdot 0{,}52\text{m}=3{,}54\ \text{m}.$$

За израду прозора потребно је 3,54 m ПВЦ профила.



цртеж 8

Пример 5

На *цртежу* 9 је представљен травњак у облику трапеза и кружна цветна леја у њему. Травњак и цветна леја треба да се ограде са 2 реда декоративног ужета чија је цена 78 денара по метру. Колико новца треба да плати предузеће „Уређен град" за ограђивање ужетом?

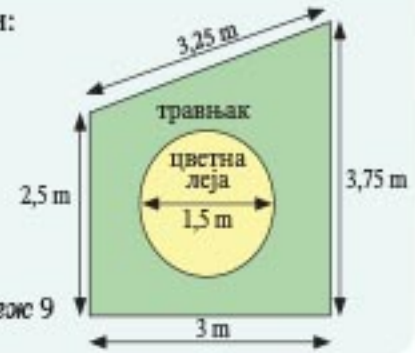
Дужина 1 реда ужета који је потребан за ограђивање износи:

$L = L_t + L_c \approx 3\text{ m} + 3{,}75\text{ m} + 3{,}25\text{ m} + 2{,}5\text{ m} + 1{,}5\text{ m} \cdot 3{,}14 = 17{,}21\text{ m}$

За 2 реда потребно је приближно $17{,}21 \cdot 2 = 34{,}42$ m ужета.

Сума коју треба да плати предузеће износи:

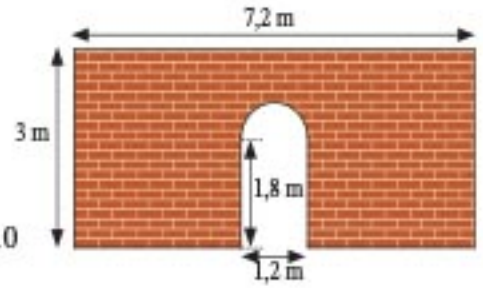
$34{,}42\text{ m} \cdot 78\text{ ден.} = 2684{,}76\text{ ден.} \approx 2685$ денара.



цртеж 9

Задатак 4

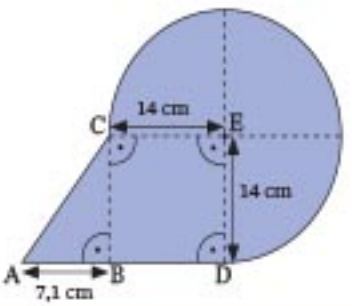
Израчунај колико ће летвица бити потребно да се заврши зид облика и димензија као на *цртежу* 10.



цртеж 10

Задатак 5

Израчунај обим облика приказаног на *цртежу* 11.

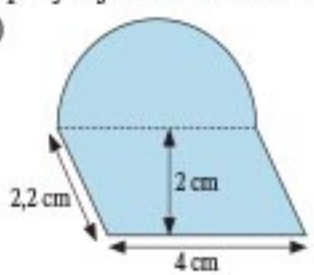


цртеж 11

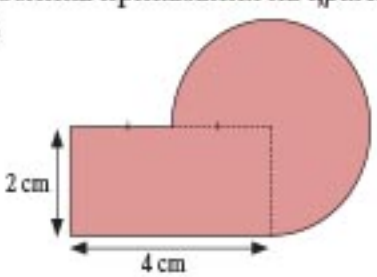
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај обим сложених 2Д облика приказаних на *цртежу* 12:

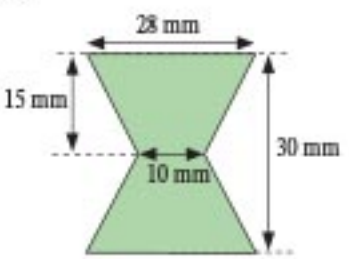
а)



б)

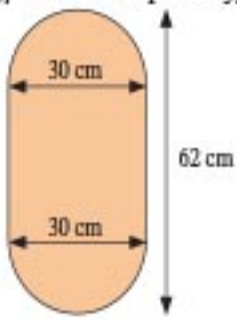


в)

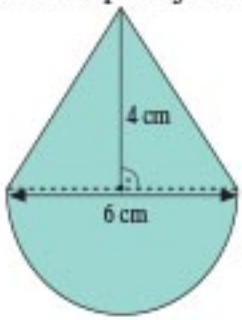


цртеж 12

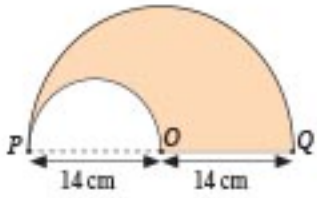
2. *Цртеж* 13 приказује прозор авиона. Пронађи његов обим.



цртеж 13



цртеж 14



цртеж 15

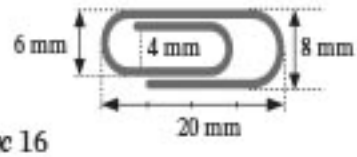
3. На *цртежу* 14 је приказана везена апликација за одећу коју треба опшити по ивицама украсном траком. Израчунај дужину траке која ће се употребити за украшавање.

4. Машински радник сече велики полукруг пречника 28 cm. Затим радник из већег полукруга исече мањи полукруг и уклања га (*цртеж* 15). Пречник уклоњеног полукружног дела је 14 cm. Нађи обим добијеног облика. Користи $\pi \approx 22/7$. ДРОПКА

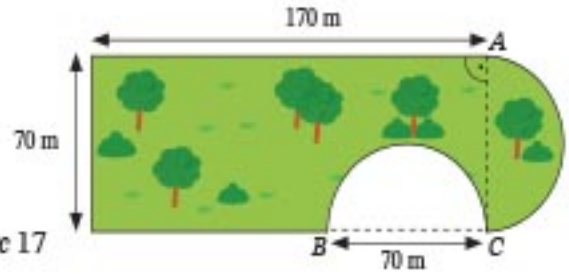
5. Фабрика канцеларијског материјала производи спајалице (*цртеж* 16). Колико спајалица се може направити од челичне жице дужине 10 m?

6. На цртежу 17 је приказан парк у облику правоугаоника са додатим полукругом на једној страни и одузетим другим полукругом на другој страни. Пронађи дужину стазе око парка.

Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.

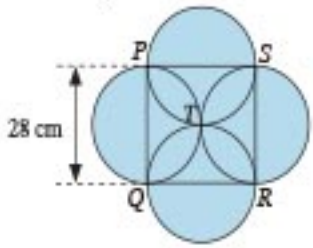


цртеж 16

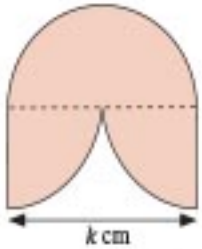


цртеж 17

7. Жица је савијена да би се формирао 2Д облик приказан на *цртежу* 18. Облик је састављен од четири идентичне кружнице. Свака кружница сече се друге две. Четири кружнице се секу у заједничкој тачки *T*, која је центар квадрата *PQRS*. Нађи дужину жице. Користи $\pi \approx \frac{22}{7}$.



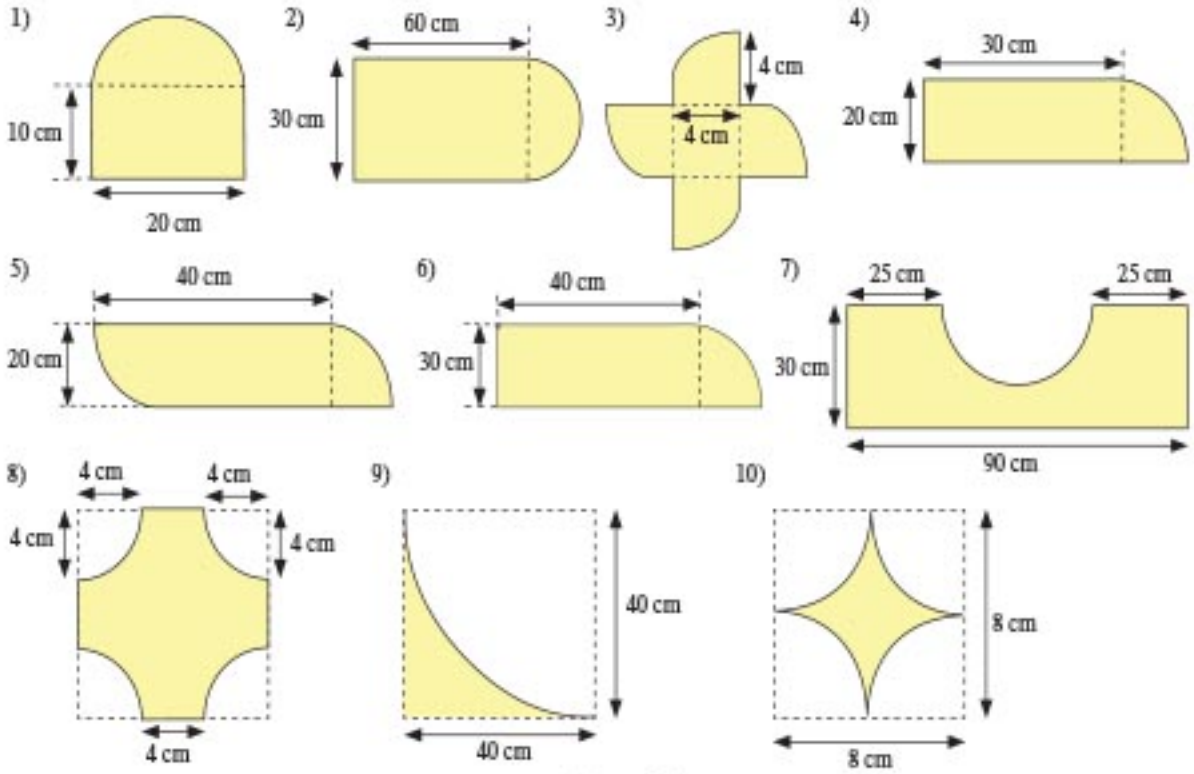
цртеж 18



цртеж 19

8. Обим 2Д облика датог на *цртежу* 19 је 97,29 dm. Нађи вредност *k*.

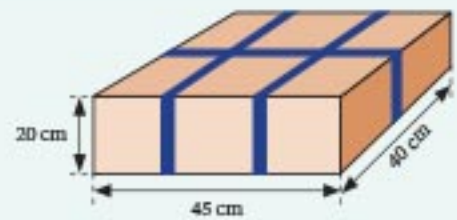
9. Израчунај обим 2Д облика датих на *цртежу* 20:



цртеж 20

Истраживање

Кутија за лаптоп са димензијама као на слици 1 је упакована са 3 пластичне траке, тако да се два краја сваке траке преклапају на месту где се спајају за 5 cm. Израчунај колико је пластичне траке потребно за паковање 200 кутија?



слика 1

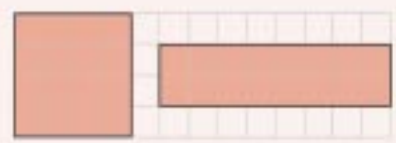
6. ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Активност

Колика је површина P облика на *цртежу* 1? Које су површине облика на *цртежу* 2? Да ли су облици подударни?



цртеж 1



цртеж 2

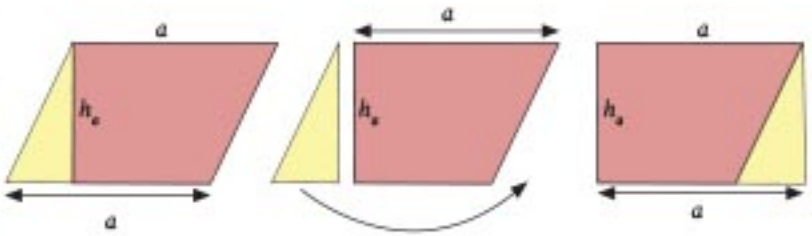
Облици на слици 2 нису подударни, али се састоје од истог броја (16) подударних квадратића. За њих још кажемо да су **једнако површински**.

У свакодневном животу се често налазимо у ситуацијама када треба да одредимо површину 2Д облика. При томе се увек ослањамо на следећа својства површине:

1. Мера површине било ког 2Д облика је позитиван број.
2. Складни 2Д облици имају једнаке површине.
3. Ако је 2Д облик састављен од више делова који се не преклапају, онда је његова површина збир површина тих делова.

Да бисмо одредили површину паралелограма, користићемо *цртеж* 3.

Паралелограм на цртежу „сечемо" дуж једне од његових висина и померамо „исечени" троугао док не добијемо други паралелограм. Пошто је висина h_a нормална на страницу a, добијени паралелограм је правоугаоник са страницама a и h_a. Његова површина је производ дужина a и h_a. Добијени правоугаоник је једнак површини паралелограма.

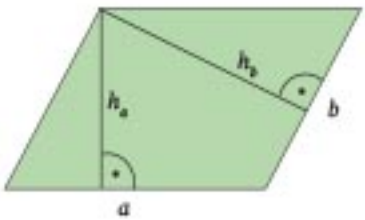


цртеж 3

Скенирај код

На *цртежу* 4 дат је паралелограм са страницама a и b. Повучене су висине h_a и h_b, које одговарају страницама a и b. Површина паралелограма једнака је производу дужина странице и одговарајуће висине, односно

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$$



цртеж 4

Површина паралелограма једнака је производу дужина било које странице и одговарајуће висине.

Стога се површина P паралелограма израчунава помоћу формула:

$P = a \cdot h_a$ или $P = b \cdot h_b$,

где су a и b странице, a h_a и h_b одговарајуће висине страница паралелограма.

Пример 1

Једна страница паралелограма је 5 cm, а висина спуштена на њу је 3cm. Колика је површина паралелограма?

Према условима у задатку, имамо да је $a = 5$ cm и $h_a = 3$ cm. Површина паралелограма је

$P = a \cdot ha = 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 15 \text{ cm}^2$

Активност

Како можеш из формуле $P = a \cdot h_a$ да израчунаш?
а) страницу a, дате P и h_a, б) висину h_a, дате a и P?

Пример 2

Једна страница паралелограма је дугачка 15cm, а одговарајућа висина је дуга 8 cm.
а) Колико износи висина која одговара другој страници дужине 12 cm?
б) Упореди дужине страница и одговарајуће висине. Шта примећујеш?

а) Према условима у задатку, имамо да је $a = 15$ cm, $h_a = 8$ cm и $b = 12$ cm.
Површина паралелограма износи:
$P = a \cdot h_a = 15 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$.
Према формули $P = b \cdot h_b$ добијамо

$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{120}{12} = 10 \text{ cm}.$$

б) Примећујемо да је висина до дуже странице паралелограма мања од висине до краће странице паралелограма.

Задатак 1

Израчунај висину h_b паралелограма, ако су познате дужине страница $a = 4$ cm, $b = 5$ cm и дужина његове висине $h_a = 3$ cm.

Задатак 2

Дужине страница паралелограма су 10 dm и 1,2 m. Колико износи већа висина ако је краћа за 45 cm?

Задатак 3

Како ће се променити површина паралелограма ако:
а) једну страницу повећамо 2 пута, б) једну страницу смањимо 3 пута.

Пример 3

Пољопривредно газдинство планира да посеје парцелу у облику паралелограма са једним паром страница дужине 1200 m и растојањем између њих 750 m. Ако семе кошта 82,5 денара по хектару, колики ће бити укупни трошкови сетве за целу парцелу?

Површина њиве износи:
$P = 1200 \text{ m} \cdot 750 \text{ m} = 900\,000 \text{ m}^2 = 90 \text{ hm}^2$ $\quad (1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2)$
Укупни трошкови сетве целе парцеле су $90 \cdot 82{,}5$ денара $= 7425$ денара.

Задатак 4

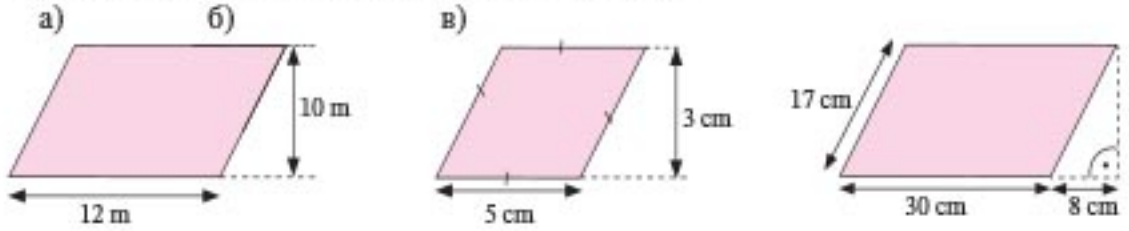
Грађевинска фирма треба да поплоча део паркинга који иам облик паралелограма. Дужина једне странице је 80 m, а растојање између страница је 60 mm Ако постављање плочица кошта 125 денара по квадратном метру, колика ће бити укупна цена поплочавања целог паркинга?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нацртај и попуни табелу у којој су дате вредности за неке елементе паралелограма.

a	b	h_a	h_b	P
9 cm	12 cm			36 cm²
12 mm	7,5 mm	5 mm		
		9 cm	0,3 dm	18 cm²
12 cm			6 dm	24 dm²

2. Израчунај површину паралелограма на *цртежу* 5:



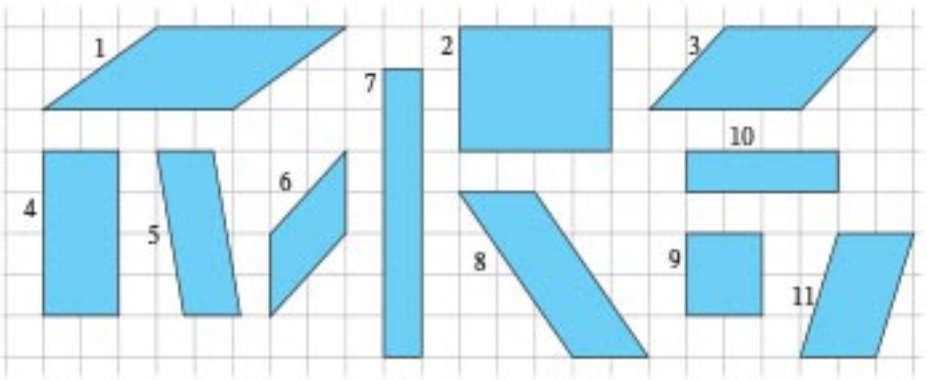
цртеж 5

3. Површина паралелограма је 36 cm², а његове висине су 4 cm и 6 cm. Израчунај његов обим.

4. Површина ромба је 24 cm², његов обим је 24 cm. Израчунај висину ромба.

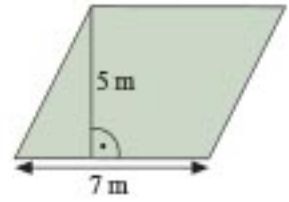
5. Израчунај површину ромба обима 36 cm, ако је висина 2 cm мања од странице.

6. Који од паралелограма на *цртежу* 6 имају једнаку површину?



цртеж 6

7. Наставник је замолио своје ученике да запишу површину паралелограма на *цртежу* 7. Мира је написала 12 m², а Јован 35 m. Обоје су погрешили.
   а) Објасни грешку за сваког од њих.
   б) Напиши тачан одговор.



цртеж 7

8. Саид има њиву у облику ромба са дужином ограде од 96 m и растојањем између супротних страна од 18 m. Има врећу ђубрива од 15 kg са етикетом „Користите 35 g ђубрива по m²". Да ли Саид има довољно ђубрива за целу њиву?

9. Кројачица треба да направи завесу у облику паралелограма. Дужина доње стране завесе је 2,4 m, а одговарајућа висина је 1,8 m. Колика је површина тканине која јој је потребна да би сашила завесу?

10. Мајстор израђује зидну декорацију од плочица у облику паралелограма. Свака плочица има дужину странице од 45 cm, а одговарајућа висина је 30 cm.
    а) Израчунај површину једне плочице у квадратним центиметрима и у квадратним метрима.
    б) Ако зид који треба да се покрије има површину од 4,5 m², колико је плочица потребно за цео зид?
    в) Ако једна плочица кошта 85 денара, колики ће бити укупна сума за постављање свих плочица?

Истраживање

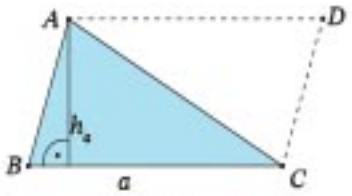
1. Дат је квадрат *MNPQ*. Конструиши паралелограм са страницом *MN* и оштрим углом од 60° који има исту површину као и квадрат. Објасни поступак.
2. Користећи геометријски софтвер, нацртај паралелограм, одреди његову површину и истражи како се она мења са променом страница и висина.
   Нацртај још паралелограма једнаке површине са првим нацртаним паралелограмом.

7. ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Активност

Нацртај паралелограм *ABCD* и повуци једну његову дијагоналу и две висине.
Да ли су добијени троуглови подударни и зашто? Означи по једну висину сваког од добијених троуглова.

Троугао ABC са основом a и одговарајућом висином h_a је „доцртан" до паралелограма $ABCD$ (*цртеж* 1). Састоји се од два подударна троугла ABC и CDA. Зато је површина сваког од њих једнака половини површине паралелограма $ABCD$:



цртеж 1

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a .$$

Значи, површина P троугла са основом a и висином h_a је

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

На сличан начин можемо закључити да, за друге две странице b и c, и одговарајуће висине h_b и h_c, важе формуле:

$$P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ и } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

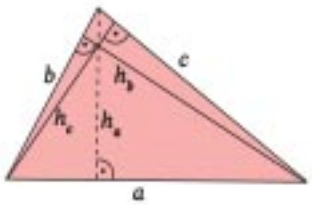
Скенирај код за површину троугла.

Површина троугла једнака је полупроизводу дужина било које странице и одговарајуће висине.

Према томе површина троугла P се израчунава помоћу формула (*цртеж* 2):

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ или } P = \frac{b \cdot h_b}{2} \text{ или } P = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

где су a, b и c странице, а h_a, h_b и h_c одговарајуће висине страница троугла.



цртеж 2

Пример 1

Израчунај површину троугла са страницом $a = 18$ cm и висином $h_a = 10$ cm.

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{18\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm}}{2} = 90\ \text{cm}^2.$$

Задатак 1

Израчунај површину троугла, ако је дато:

а) $b = 1{,}2$ dm и $h_b = 0{,}8$ dm, б) $c = 3\frac{2}{5}$ m и $h_c = 7{,}6$ m.

Активност

Како можеш из формуле $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ да израчунаш:

а) страницу a, дате P и h_a, б) висину h_a, дате a и P?

Пример 2

Израчунај дужину странице троугла површине $P = 39\ \text{cm}^2$, ако је висина спуштена на страницу a дуга 7,8 cm.

Према условима у задатку имамо да је $h_a = 7{,}8\ \text{cm}$ и $P = 39\ \text{cm}^2$. Према формули $P = \frac{a \cdot h_a}{2}$ за страну a добијамо

$$a = \frac{2P}{h_a} = \frac{2 \cdot 39\,\text{cm}^2}{7{,}8\,\text{cm}} = 10\,\text{cm}.$$

Задатак 2

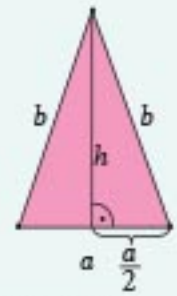
Од једног троугластог мозаика, Ања склапа нови, у облику троугла са истом површином. Ако је дужина странице првог мозаика 9 cm, а одговарајућа висина 6 cm, колика ће бити висина другог мозаика, ако му је страница 12 cm?

Пример 3

Израчунај површину једнакокраког троугла са обимом $L = 36$ cm и основицом $a = 8$ cm (*цртеж* 3).

Према формули за израчунавање обима једнакокраког троугла $L = a + 2b$, добијамо да

$$b = \frac{L - a}{2} = \frac{36\,\text{cm} - 8\,\text{cm}}{2} = 14\ \text{cm}.$$



цртеж 3

Применом Питагорине теореме, за висину h спуштену на страну a налазимо да је

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(14\,\text{cm})^2 - (4\,\text{cm})^2} = \sqrt{180\,\text{cm}^2} \approx 13{,}4\,\text{cm}.$$

Вредност $\sqrt{180}$ се израчунава помоћу калкулатора на одговарајућем дугмету.

Узимамо приближну вредност, у овом случају заокружену на једну децималу.

Тражена површина једнакокраког троугла је

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{8\,\text{cm} \cdot 13{,}4\,\text{cm}}{2} = 53{,}6\ \text{cm}^2.$$

Задатак 3

Травњак има облик једнакокраког троугла са страницама 5 m и висином до основе 3 m. Колико воде је потребно за заливање током једне недеље, ако површина од 3 м^2 захтева 5 *l* воде сваког дана?

Задатак 4

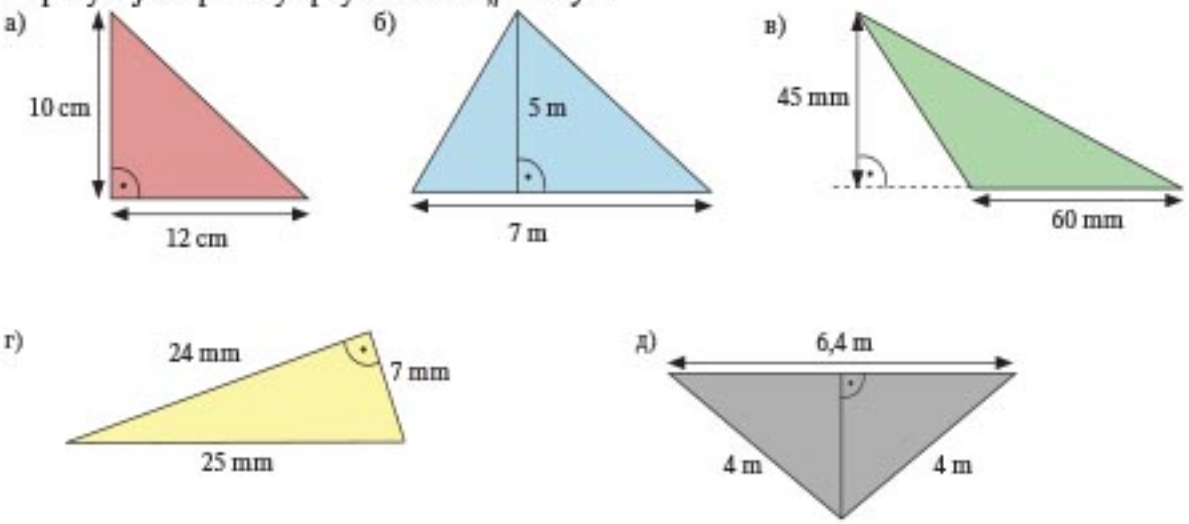
Израчунај површину платна потребног за израду једра брода (*цртеж* 4). Колико ће коштати материјал ако 1m² кошта 326 денара?



цртеж 4

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај површину троуглова на *цртежу* 5:



цртеж 5

2. За дати троугао ABC, израчунај:
а) b, ако $P = 64\ \text{cm}^2$ и $h_b = 8\ \text{cm}$, б) h_c, ако $P = 8\ \text{cm}^2$ и $c = 3{,}2\ \text{cm}$.

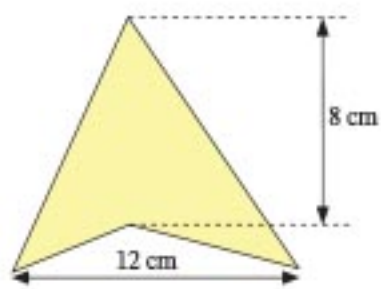
3. Паралелограм са страном a и одговарајућом висином h_a и троугао са страном $2a$ су једнаке површине. Колика је висина троугла?

4. Како ће се променити површина троугла ако се страница:
а) повећа 3 пута, а одговарајућа висина остане непромењена,
б) смањи 6 пута, а одговарајућа висина повећа 2 пута.

5. Израчунај обим правоуглог троугла ако је његова површина 54 cm² и једна од његових катета је 2 cm.

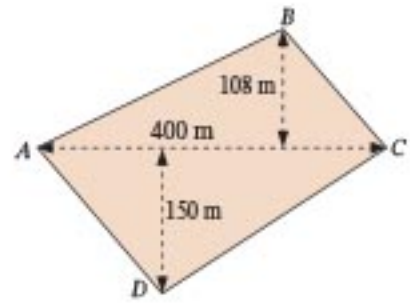
6. Изведи формулу за површину једнакостраничног троугла користећи Питагорину теорему. Израчунај његову површину.

7. Амблем једне школе је у облику датом на *цртежу* 6 Израчунај његову површину.



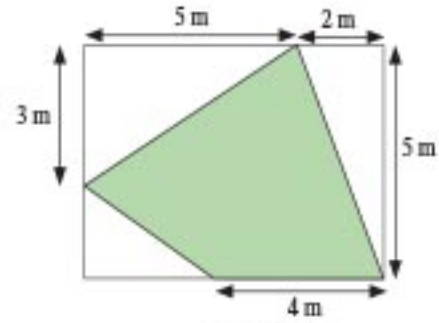
цртеж 6

8. На *цртежу* 7 приказана је њива једног пољопривредника. Он хоће да је прода по цени од 1280 денара по квадратном метру. Израчунај цену њиве.



цртеж 7

9. Израчунај колико ће новца бити потребно за семење за њиву у облику *цртежа* 8, ако је семе за 1 m^2 кошта 37 денара.



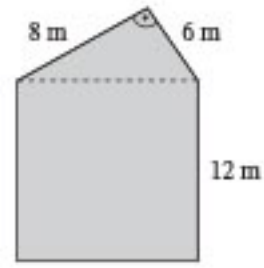
цртеж 8

10. Ти си део тима који треба да асфалтира паркинг близу твоје школе. Паркинг има петоугаони облик, као што је приказано на *цртежу* 9.

а) Колико ће коштати укупно асфалтирање ако је цена по m^2 2350 денара?

б) Поред три дуже стране паркинга планиран је мали зелени појас, који ће бити широк 1 m, са травом и другим украсним биљкама. Колико треба да се доплати за зелени појас ако за 1 m^2 хортикултурног уређења кошта 1200 денара?

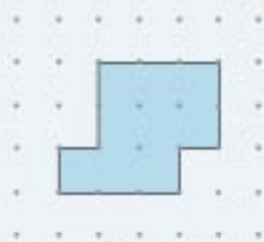
в) Предложи друга могућа решења за простор (осветљење, аутомат за воду, итд.)



цртеж 9

Истраживање

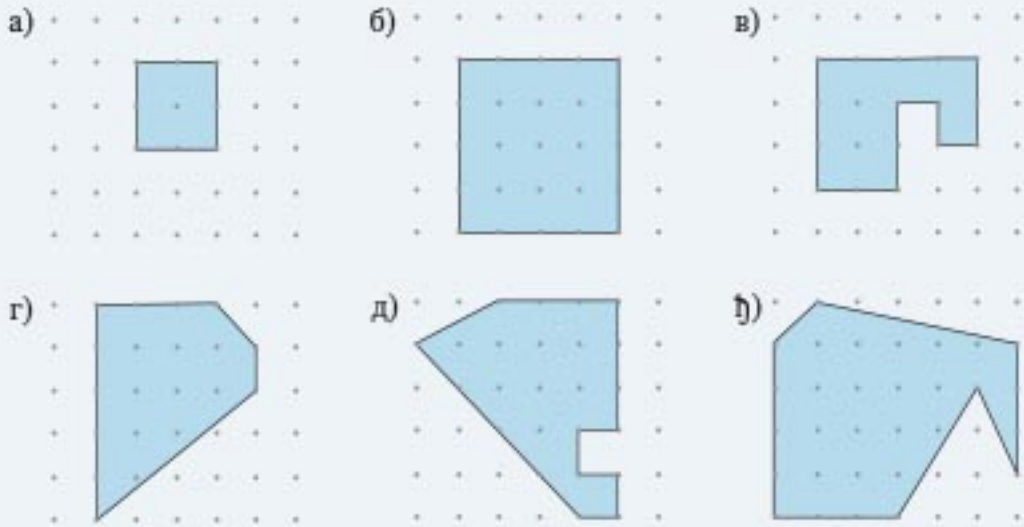
Разгледај 2Д облик нацртан на папиру са тачкицама постављеним на теменима малих квадрата. Тачке које леже на страницама 2Д облика су граничне тачке, док су оне које леже унутар 2Д облика унутрашње тачке.
На *цртежу*10, број граничних тачака $G = 14$, док је број унутрашњих тачака $V = 3$.



цртеж 10

Покушај да попуниш дату табелу према цртежу 11.

2Д облик	G	$\frac{G}{2}$	V	$\frac{G}{2}+V$	Површина P



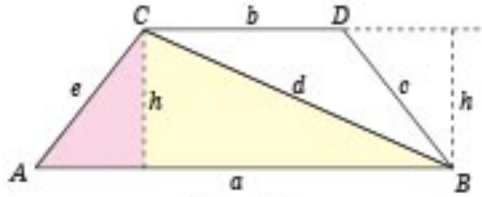
цртеж 11

Разгледај две последње колоне табеле и предложи правило које повезује P, G и V. Нацртај неколико различитих 2Д облика на папиру са тачкама и провери исправност правила.

8. ПОВРШИНА ТРАПЕЗА

Активност

Нацртај трапез на папиру и означи његове основе са a и b а висину са h. Пресеци трапез дужином једне од његових дијагонала да би га поделио/ла на два троугла.
а) Колика је висина троуглова, спуштена према страници a односно према страници b?
б) Израчунај површину оба троугла.



цртеж 1

Површина трапеза *ABCD*, приказаног на *цртежу* 1, је збир површина троугла *ABC* и троугла *BDC*, односно

$$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta BDC} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h .$$

Површина трапеза једнака је производу половине збира дужина његових основа и висине.

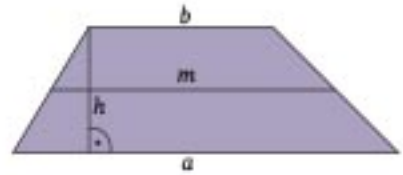
Значи, површину P трапеза израчунавамо према формули:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h ,$$

где су a и b основе, а h је висина трапеза.

Скенирај код.

Пошто је полузбир дужина основа трапеза једнак дужини средње линије трапеза $m = \frac{a+b}{2}$, горња формула за површину трапеза има облик $P = m \cdot h$.



цртеж 2

Пример 1

Израчунај површину трапеза, са основама $a = 2{,}5$ dm и $b = 8$ dm, и висином $h = 3$ dm.

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2{,}5\,\text{dm} + 8\,\text{dm}}{2} \cdot 3\,\text{dm} = 15{,}75\ \text{dm}^2.$$

Задатак 1

Израчунај површину трапеза са средњом линијом $m = 12$ cm и висином $h = 0{,}72$ dm.

Пример 2

Дата је једна основица $a = 13$ cm, површина $P = 50$ cm^2 и висина $h = 5$ cm трапеза. Израчунај другу основицу.

Из формуле за израчунавање површине трапеза $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$ добијамо

$$b = \frac{2P}{h} - a = \frac{2 \cdot 50\,\text{cm}^2}{5\,\text{cm}} - 13\,\text{cm} = 7\,\text{cm}.$$

Задатак 2

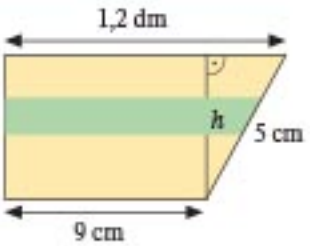
Израчунај средњу линију трапеза површине 1800 cm^2 и висине 9 dm.

Задатак 3

Основице трапеза су 8,5 cm и 5,8 cm, а његова површина је 42,9 cm^2. Израчунај висину трапеза.

Пример 3

Лирим жели да направи папирне заставице у облику правоугаоног трапеза за навијаче на школској утакмици (*цртеж* 3). Основице су 1,2 dm и 9 cm, а дужи крак је 5 cm. Колико квадратних центиметара папира му је потребно да направи 40 таквих заставица?



цртеж 3

Прво, претворимо све дужине у исте јединице.
1,2 dm = 12 cm.
Застава је у облику трапеза.
Према Питагориној теореми, за висину трапеза добијамо

$$h = \sqrt{(5\,\text{cm})^2 - (12\,\text{cm} - 9\,\text{cm})^2} = \sqrt{25\,\text{cm}^2 - 9\,\text{cm}^2} = \sqrt{16\,\text{cm}^2} = 4\,\text{cm}.$$

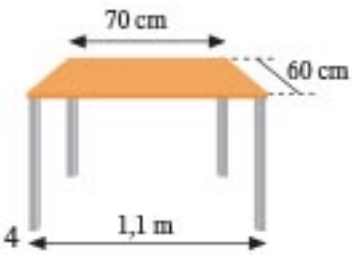
Површина трапеза износу

$$P = \frac{12\,\text{cm} + 9\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = \frac{21\,\text{cm}}{2} \cdot 4\,\text{cm} = 42\ \text{cm}^2.$$

Лириму је потребно $40 \cdot 42\ cm^2 = 1680\ cm^2$ папира.

Задатак 4

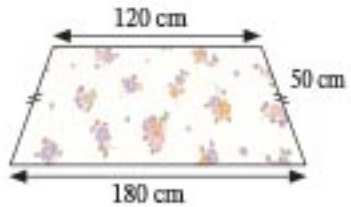
У учионици је било 25 клупа са дрвеном површином у облику једнакокраког трапеза (*цртеж* 4). Дрвену површину је потребно премазати заштитном бојом. Колико квадратних метара укупно треба премазати бојом?



цртеж 4

Задатак 5

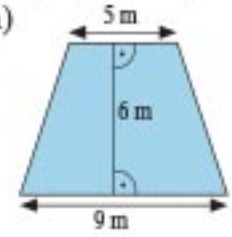
Весна жели да направи сукњу од материјала на *цртежу* 5. Израчунај површину материјала.

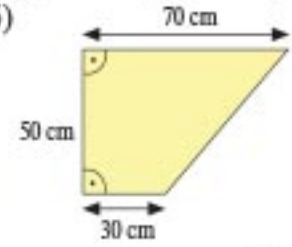


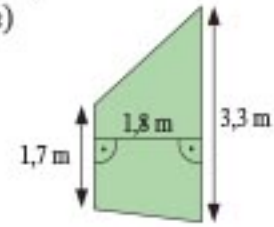
цртеж 5

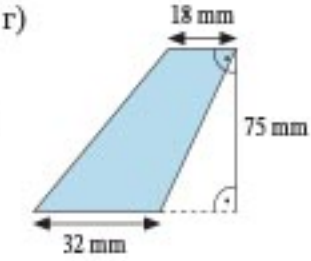
ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај површину трапеза датих на *цртежу* 6.

а) 

б) 

в) 

г) 

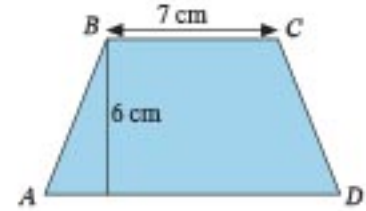
цртеж 6

2. Нацртај у своју свеску и попуни табелу са потребним димензијама за трапез:

a	42 cm	8 dm		35 cm
b	34 cm	6 dm	20 cm	
h	25 cm		9 cm	12 cm
P		42 dm^2	225 cm^2	336 cm^2

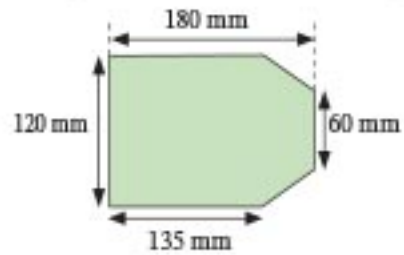
3. Израчунај средњу линију трапеза површине 280 dm^2 и висине 14 dm.

4. Израчунај дужину странице AD трапеза $ABCD$ на цртежу 7, ако је површина $P = 57$ cm^2.



цртеж 7

5. Танки комад метала у машинској радионици има облик и димензије приказане на *цртежу* 8. Одреди површину једне стране металног комада.



цртеж 8

6. Једно поље, која је имала облик трапеза са основама 142 m и 86 m и висином 42m, била је засејана памуком. Просечно је са 1 декара убрано 95 kg памука. Колико килограма памука је убрано са целог поља? Упутство: 1 декар = 10 ари.

7. Елена хоће да уреди део дворишта испред своје куће цветном површином у облику трапеза са основама 6 m и 3 m и висином 2,5m. Елена жели да посади цвеће тако да на сваком квадратном метру буде 12 садница.

а) Колико садница ће јој бити потребно за целу површину?

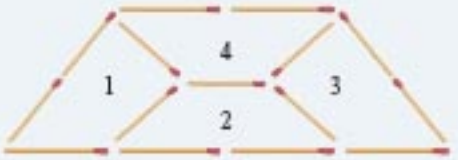
б) Ако једна садница кошта 50 денара, колики ће бити њен укупни трошак?

в) Колико метара црева ће јој бити потребно ако постави систем за наводњавање који пролази дуж обима трапеза?

г) Ако свака садница апсорбује 0,2 kg угљен-диоксида дневно, колико ће укупног угљен-диоксида апсорбовати сви засађени цветови за један дан?

Истраживање

Цртеж 9 приказује трапез направљен од десет шибица. Подели трапез на четири подударна трапеза користећи пет других шибица.

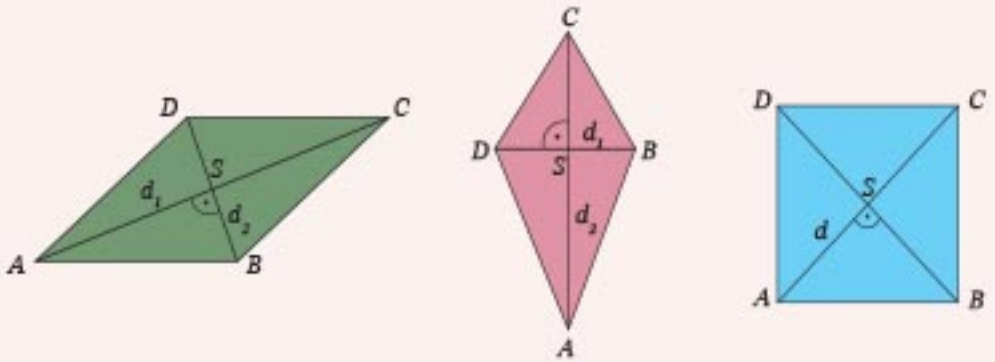


цртеж 9

9. ПОВРШИНА РОМБА, ДЕЛТОИДА И КВАДРАТА

Активност

Нацртај ромб, делтоид и квадрат. Нацртај његове дијагонале. Који је релативни положај дијагонала у сваком од нацртаних четвороуглова?



цртеж 1

Дијагонала AC је оса симетрије за сваки од четвороуглова на *цртежу* 1. Према томе, за сваки од четвороуглова $DABC \cong DADC$. То значи да

$$P_{DABC} = P_{DADC}.$$

Осим тога, површина сваког четвороугла је збир површина два троугла, односно

$$P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC} = 2P_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BS}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{d_1 \cdot \frac{d_2}{2}}{\cancel{2}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Површина ромба, делтоида и квадрата једнака је полупроизводу дужина њихових дијагонала.

Према томе, површина P ромба и делтоида се израчунава према формули:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

где су d_1 и d_2 дијагонале ромба односно делтоида.

Конкретно, површина квадрата се израчунава према формули:

$$P = \frac{d^2}{2},$$

где је d дијагонала квадрата.

Пример 1

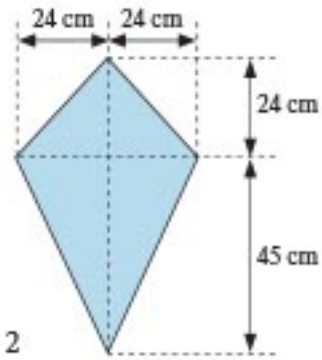
Израчунај површину ромба са дијагоналама $d_1 = 4{,}5$ cm и $d_2 = 8{,}3$ cm.

Површина ромба износи

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot 8{,}3\,\text{cm}}{2} = 18{,}675\ \text{cm}^2.$$

Задатак 1

Израчунај површину летелице у облику делтоида дате на *цртежу* 2.



цртеж 2

Активност

Како можеш из формуле за површину делтоида $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ израчунати дужину једне дијагонале, ако су дате површина P и дужина друге дијагонале?

Пример 2

Израчунај дужину непознате дијагонале делтоида, ако је његова површина 90 cm^2, а друга дијагонала је дугачка 7,5 cm.

Према формули за израчунавање површине делтоида $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ добијамо да је

$$d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{2 \cdot 90\,\text{cm}^2}{7{,}5\,\text{cm}} = 24\ \text{cm}.$$

Задатак 2

Израчунај дужину дијагонале квадрата површине 150 cm².

Пример 3

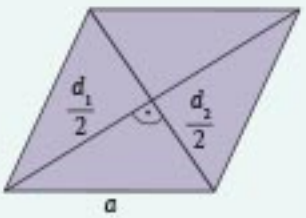
Израчунај површину ромба са дужином странице 5 cm, ако је једна од дијагонала дугачка 8 cm.

Дијагонале ромба су једна на другу нормалне (*цртеж* 3).
Применом Питагорине теореме добијамо

$$\frac{d_2}{2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-\left(\frac{8\,\text{cm}}{2}\right)^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3\,\text{cm}$$

из чега налазимо да је $d_2 = 3\,\text{cm} \cdot 2 = 6\,\text{cm}$.
Површина ромба износи

$$P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{8\,\text{cm}\cdot 6\,\text{cm}}{2}=24\,\text{cm}^2.$$



цртеж 3

Задатак 3

Израчунај колико је метара жице потребно да се огради поље у облику ромба површине 36 dam², ако је једна од његових дијагонала 9 dam.

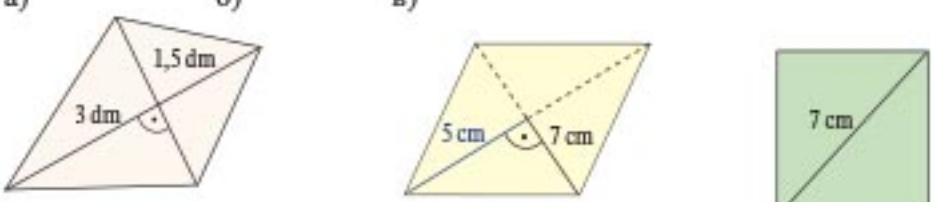
Задатак 4

Израчунај колико је квадратних плочица са страницом 60 cm потребно да се поплоча квадрат који има облик делтоида. Две дуже странице квадрата су 50 m и захватају угао од 60°, а краће странице захватају прави угао.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Израчунај површину четвороугла датих на *цртежу* 4:

а) б) в)



цртеж 4

2. Израчунај висину ромба чије су дијагонале дугачке 16 cm и 12 cm.

3. Површина делтоида је 9 dm^2, а једна од његових дијагонала је 1,5 dm. Колика је друга дијагонала делтоида?

4. Делтоид и квадрат имају једнаке површине. Израчунај дијагоналу квадрата, ако су дијагонале делтоида 16 dm и 4 cm.

5. Теа би хтела да направи декоративни постер у облику делтоида са страницама 28 cm и 46 cm. Једна дијагонала, која није оса симетрије, дуга је 35 cm. Колика је површина постера?
   Напомена: Користи калкулатор би израчунао/ла квадратни корен.

6. Ђаци основне школе су одлучили да дизајнирају мини соларни панел за школу. Сваки соларни панел је у облику ромба са дијагоналама од 80 cm и 60 cm.
   а) Ако је за покривање крова школског павиљона потребно 250 црепова, колика је укупна површина коју ће покрити сви црепови?
   б) Ако један квадратни метар површине покривене соларним панелима ствара 15 Wh енергије дневно, колико ће енергије створити укупна површина за један дан?

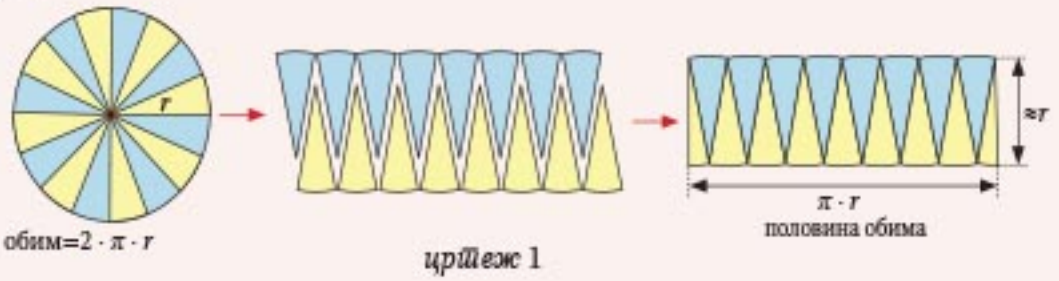
Истраживање

1. На милиметарском папиру нацртај 2 дужи које се секу под правим углом. Затим узми њихове крајње тачке као темена четвороугла.
   а) Израчунај површину четвороугла бројањем квадрата на милиметарском папиру.
   б) Израчунај површину користећи формулу за четвороугао са међусобно нормалним дијагоналама. Упореди оба резултата. Шта примећујеш?
   в) Нацртај и друге четвороуглове на милиметарском папиру. Израчунај њихову површину бројањем квадрата на милиметарском папиру. Провери израчунавањем користећи формулу за површину четвороугла са међусобно нормалним дијагоналама.
2. Објасни како се површина трапеза са нормалним дијагоналама може израчунати дељењем трапеза на два троугла?

10. ПОВРШИНА КРУГА

Активност

Исеци круг од папира, подели га на 16 једнаких делова, а затим састави облик као на *цртежу* 1.



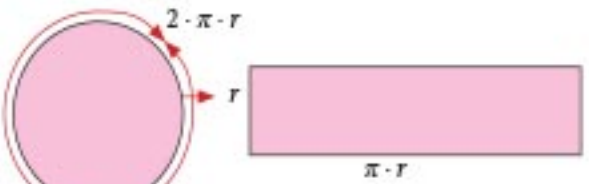
цртеж 1

На шта те подсећа добијени облик? Има исту површину као круг.
Како ћеш одредити његову површину?

У свакодневном животу често се сусрећемо са потребом да израчунамо површину круга или његових делова.

Скенирај код и нађи други начин да дођеш до формуле за површину круга.

Замислимо да је круг полупречника r подељен, на пример, на 1000 једнаких делова које ћемо распоредити као горе. Добијени облик ће бити још „ближи" правоугаонику, тако да ће његова површина бити $P \approx \pi \, r \cdot r = \pi \, r^2$ (*цртеж* 2).



цртеж 2

Површина круга једнака је производу броја π и квадрата његовог полупречника.

Према томе површина круга P израчунава се према формули:

$P = \pi r^2$,

где је r полупречник круга (*цртеж* 3).



цртеж 3

Пример 1

Израчунај површину круга са полупречником од 4cm.

Заменом датих вредности у формулу за израчунавање површине круга, добијамо

$P = \pi \, r^2 \approx 3{,}14 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$.

Веома често пишемо и $P = \pi \, r^2 = (4 \text{ cm})^2 \cdot \pi = 16 \, \pi \text{ cm}^2$

Задатак 1

Израчунај површину круга са:
а) полупречником 1 dm, б) полупречником 3,2 m, в) пречником 10 cm.

Активност

Како можеш из формуле $P = \pi r^2$ да израчунаш полупречник r, ако је дата површина P?

Пример 2

Израчунај пречник круга површине $P = 113{,}04\ \text{cm}^2$.

Користећи формулу за израчунавање површине круга, налазимо да

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{113{,}04\,\text{cm}^2}{3{,}14}} = \sqrt{36\,\text{cm}^2} = 6\ \text{cm}.$$

Тада за пречник добијамо $d = 2r \approx 2 \cdot 6\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$.

Задатак 2

Израчунај пречник плеха за палачинке, ако је површина једне палачинке печене у плеху $1962{,}5\ \text{cm}^2$.

Пример 3

Израчунај површину круга са обимом $L = 4\pi\ \text{cm}$.

Из формуле за дужину круга $L = 2rp$, налазимо да је $r = \frac{L}{2\pi} = \frac{4\pi\,\text{cm}}{2\pi} = 2\ \text{cm}$.

Тогаш за плоштината на кругот добиваме $P = \pi \cdot r^2 = (2\ \text{cm})^2 \cdot \pi = 4\pi\ \text{cm}^2$.

Задатак 3

Израчунај површину круга чији је обим 25,12 dm.

Задатак 4

Израчунај обим круга површине $314\ \text{dm}^2$.

Задатак 5

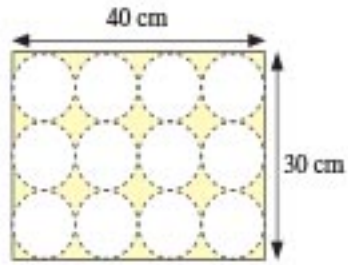
Колико пута треба повећати полупречник једног круга да би се његова површина повећала 25 пута?

Задатак 6

Када водени балон пукне на земљи, ствара круг воде пречника приближно 26 cm. Израчунај приближну површину површине земље која је мокра.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колико пута ће се повећати површина круга ако се његов полупречник повећа:
   а) 3 пута, б) 7 пута?
2. Кружни сто пречника 80 cm је покривен квадратним столњаком површине 1600 cm^2. Да ли је сто потпуно покривен столњаком?
3. Дата су два круга полупречника 6 cm и 4 cm. Нађи полупречник круга чија је површина једнака:
   а) збазлици површина два круга.
4. Магарац је везан за стуб конопцем дужине 3,6 m. На колико површини се магарац може кретати?
5. Две кружнице полупречника $r_1 = 5{,}4$ cm и $r_2 = 3$ cm додирују се изнутра. Израчунај површину дела равни који се налази између те две кружнице.
6. Јан ради у посластичарници где се свакодневно праве колачи кружног облика који се секу од комада теста димензија 30 cm × 40 cm, као што је приказано на *цртежу* 4. Израчунај површину неисеченог дела комада теста.



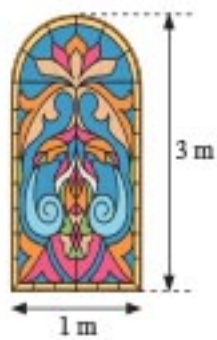
цртеж 4

7. Израчунај површину дела слагалице (*цртеж* 5) и заокружи решење на најближи квадратни милиметар.



цртеж 5

8. Цена витража је 1150 динара за 1 m^2. Маја је архитекта и пројектује простор у који поставља 4 прозора са витражом (*цртеж* 6). Њен буџет је 14.000 динара. Провери да ли Маја има довољно средстава да реализује свој пројекат.



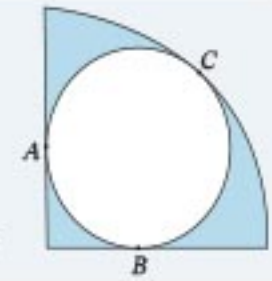
цртеж 6

Истражување

Круг полупречника r је уписан у четвртину круга полупречника R, тако да се додирује у тачкама A, B и C (*цртеж 7*)

а) Наћи однос између полупречника R и r.

б) Наћи однос површине обојеног облика према површини белог круга.



цртеж 7

11. ПОВРШИНА КРУЖНОГ ИСЕЧКА, КРУЖНОГ ОДСЕЧКА И КРУЖНОГ ПРСТЕНА

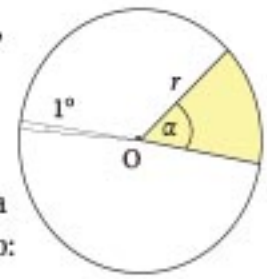
Активност

а) Нацртај два круга са произвољним полупречником. У једном нацртај кружни одсечак, а у другом кружни исечак. Затим означи централне углове и одговарајуће кружне лукове.

б) Нацртај две концентричне кружнице и обоји простор међу њима. Именуј добијени облик.

Кружни исечак круга полупречника r, чији је централни угао 1° (цртеж 1), има површину једнаку $\frac{1}{360}$ површине круга, односно

$$P_{1^\circ} = \frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ}.$$



цртеж 1

Кружни исечак у кругу полупречника r, чији је централни угао 2°, има два пута већу површину од кружног исечка чији је централни угао 1°, односно: $P_{2^\circ} = P_{1^\circ} \cdot 2$.

Према томе, добијамо да је $P_{2^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot 1^\circ}{360^\circ} \cdot 2 = \frac{\pi r^2 \cdot 2^\circ}{360^\circ}$.

Размишљајући на овај начин, можемо закључити да кружни пресек у кругу полупречника r, чији централни угао α има површину

$$P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}.$$

Знамо да је дужина лука који одговара кружном пресеку исечак $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$, па се формула за израчунавање површине кружног пресека може написати у облику

$$P = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{r}{2} = \frac{l \cdot r}{2}.$$

Површина кружног исечка једнака је полупроизводу дужине одговарајућег кружног лука и полупречника.

Зато се површина кружног пресека P израчунава према формули:

$$P = \frac{l \cdot r}{2},$$

где је l дужина одговарајућег кружног лука, а r је полупречник круга.

Пример 1

Израчунај површину кружног исечка који одговара централном углу од 57° у кругу полупречника 6 cm.

Заменом мерних бројева полупречника r и угла α у формули за кружни исечак, добијамо:

$$P = \frac{l \cdot r}{2},$$

Задатак 1

Израчунај површину кружног исечка, ако је $r = 5$ cm и $l = 6{,}8$ cm.

Активност

Како из формуле $P = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°}$ можеш да израчунаш:

а) полупречник r, ако су дати дати P и α , б) централни угао α, ако су дати r и P?

Пример 2

Кружни исечак полупречника 7 cm има површину од 64,2 cm². Израчунај величину централног угла исечка

Према формули за израчунавање површине кружног исечка, за угао α добијамо

$$\alpha = \frac{360° P}{\pi r^2} \approx \frac{360° \cdot 64{,}2\,\text{cm}^2}{3{,}14 \cdot (7\,\text{cm})^2} = 150°.$$

Задатак 2

У пекари „Слатка тачка“ се продају кришке пите у облику кружног исечка. Цела пита има кружни облик са полупречником од 20 cm и сече се на 8 једнаких делова.

а) Колики је централни угао једног парчета пите?

б) Колика је површина једног парчета пите?

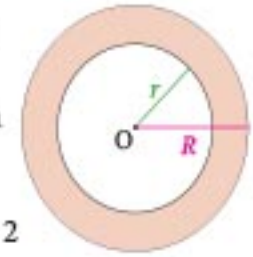
Задатак 3

Колики је полупречник круга у коме централни угао од 70° одговара исечку површине 15,26 cm²?

На *цртежу* 2 приказана су два концентрична круга. Означи полупречник великог круга са R, а полупречник малог круга са r.

Површину кружног прстена ћеш добити ако од површине великог круга одузмемо површину малог круга, односно

$$P = \pi R^2 - \pi r^2, \quad P = \pi\left(R^2 - r^2\right).$$



цртеж 2

Пример 3

Израчунај површину кружног прстена, ако су полупречници кругова који га окружују $R = 9$ cm и $r = 5{,}7$ cm.

Према формули за површину кружног прстена, налазимо да је

$$P = \pi(R^2 - r^2) \approx 3{,}14 \cdot \left(\left(9\,\text{cm}\right)^2 - \left(5{,}7\,\text{cm}\right)^2\right) = 152{,}3214\,\text{cm}^2.$$

Задатак 4

У средини школског дворишта налази се фонтана кружног облика. Око фонтане, ученици ће направити цветну леју у облику кружног прстена. Спољашњи полупречник цветне леје је 3m, а унутрашњи полупречник (до ивице фонтане) је 1,5 m.

а) Израчунај површину цветне леје.

б) Ако је за уређење 1 m^2 потребно 5 биљака, колико ће биљака бити потребно за целу цветну леју?

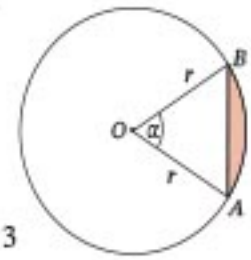
Задатак 5

Дужине два концентрична круга су 4π cm и 10π cm. Израчунај површину кружног прстена ограниченог круговима.

Задатак 6

Два кружнице са полупречницима $r_1 = 5{,}4$ cm и $r_2 = 3$ cm додирују се са унутрашње стране. Израчунај површину дела равни ограниченог круговима.

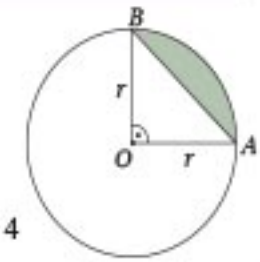
Плоштина кружног одсечка може се израчунати као разлика између површине кружног исечка са централним углом α и површине једнакокраког троугла ABO (*цртеж* 3).



цртеж 3

Пример 4

Израчунај плоштину кружног исечка са тетивом AB, ако је централни угао $\alpha = 90°$ и полупречник круга је $r = 13$ cm (цртеж 4).



цртеж 4

Плоштина кружног исечка износи

$$P_{\text{одсечак}} = P_{\text{исечак}} - P_{\Delta ABO} \approx \frac{3{,}14 \cdot \left(13\,\text{cm}\right)^2 \cdot 90°}{360°} - \frac{13\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm}}{2} = 48{,}165\ \text{cm}^2.$$

Задатак 7

Израчунај плоштину кружног исечка у кругу полупречника $r = 9$ cm, ако је дужина одговарајућег кружног лука $l = 14{,}13$ cm.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

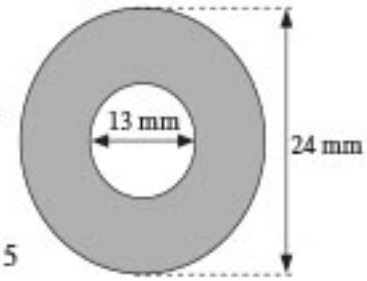
1. Израчунај плоштину кружног исечка, ако су дати:
а) $r = 3$ cm и $\alpha = 30°$, б) $r = 4{,}5$ dm и $\alpha = 45° 30'$, в) $r = 5$ cm и $l = 6{,}8$ cm.

2. Колики део плоштине круга представља кружни исечак чији је централни угао:
а) 45°, б) 60°, в) 90°, г) 120°?

3. Плоштина кружног исечка је:
а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{2}{3}$, в) $\frac{3}{4}$, г) $\frac{5}{9}$,
плоштине круга. Колики је централни угао који одговара кружном исечку?

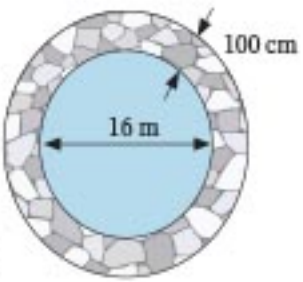
4. Плотине два концентрична круга су 4π cm^2 и 36π cm^2.
Израчунај ширину кружног прстена.

5. Израчунај плоштину горње површине машинског елемента датог на *цртежу* 5.



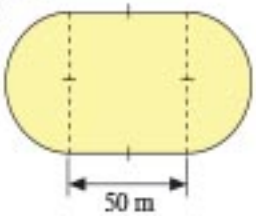
цртеж 5

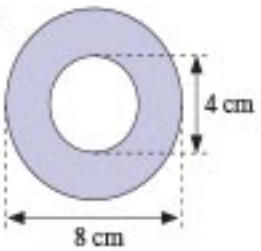
6. Мало кружно језеро има пречник од 16 m (*цртеж* 6).
а) Израчунај плоштину пластике потребну за облагање дна рибњака.
б) Око језера треба поставити траку ширине 100 cm, испуњену каменчићима.
Израчунај плоштину површине прекривене каменчићима.

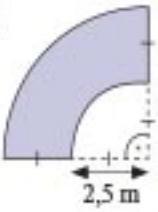


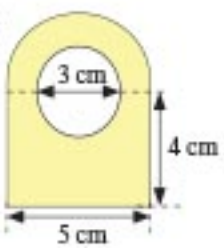
цртеж 6

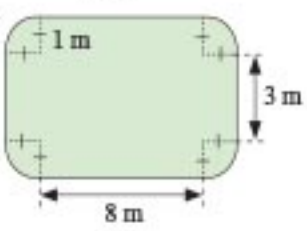
7. Израчунај плоштину облика датих на *цртежу* 7. Заокружи решења на 2 децимална места.

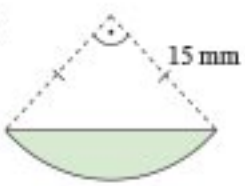
а)


б)


в)


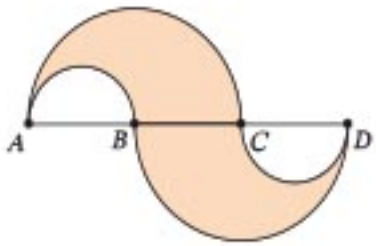
г)


д)


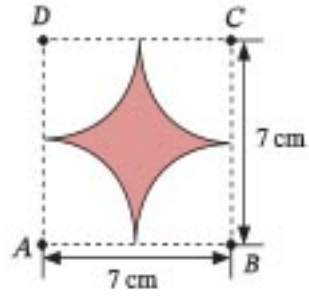
ђ)


цртеж 7

8. Четири групе ученика развијају предлог амблема за школске униформе. Свака група предлаже свој дизајн. Амблем треба да се изради од текстила и што је могуће економичније. Који амблем ће бити направљен уз најмању потрошњу текстила?

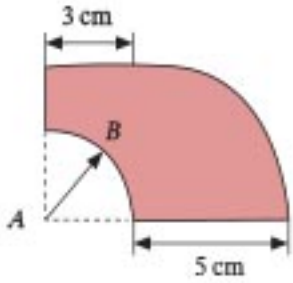


цртеж 8а

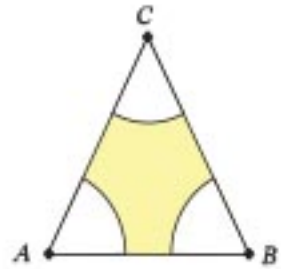


цртеж 8б

Тим 1 израђује амблем приказан на цртежу 8а, под условом да $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 3\,\text{cm}$.
Тим 2 израђује амблем приказан на цртежу 8б, под условом да
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 7\,\text{cm}$.
Тим 3 израђује амблем приказан на цртежу 8в, под условом да већи кружни лук има полупречник од 5cm, а мањи кружни лук има полупречник од $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$.
Тим 4 израђује амблем приказан на цртежу 8г, под условом да кружни лукови са центрима у теменима једнакостраничног троугла ABC са страницом 7 cm имају полупречнике од 2 cm.



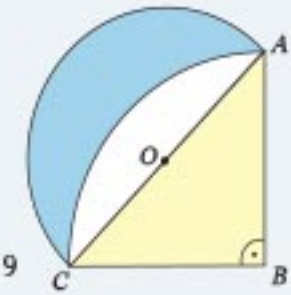
цртеж 8в



цртеж 8г

Истраживање

Покажи да је површина фигуре ограничене двама кружним луковима, обојене плавом бојом на *цртежу* 9, једнака површини једнакокраког правоуглог троугла ACB, обојеног жутом бојом.



цртеж 9

12. ПЛОШТИНА ПРИЗМЕ И ПИРАМИДЕ

Површина призме

Активност

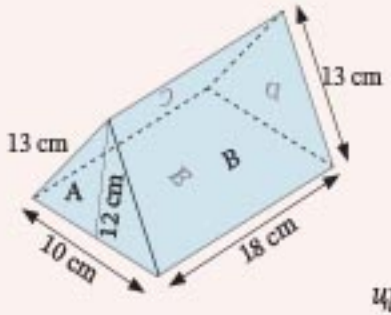
Размотри призму и њену мрежу дату на *цртежу* 1.

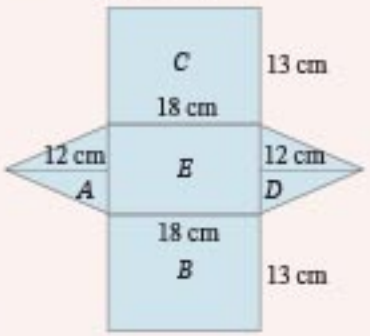
а) Од којих многоуглова се састоји мрежа троугласте призме?

б) Уочи да је зид A призме подударан са зидом D, B је подударан са C, E а није подударан ни са једним другим зидом призме.

в) Шта представља збир површина свих многоуглова из мреже призме? Како се може одредити површина призме?

г) Израчунај површину дате призме користећи њену мрежу.





цртеж 1

Из дефиниције призме јасно је да се њена површина може израчунати као збир површина свих њених страна.

Површина призме је збир површина двеју основа и површина бочних површина - зидова.

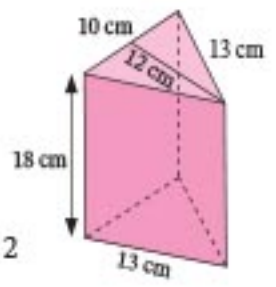
Зато се површина призме P израчунава према формули:

$P = 2B + M$,

где је B површина основе, а M површина бочне површине – зида призме.

Пример 1

Израчунај површину призме дате на *цртежу* 2.



цртеж 2

Основа призме је једнакокраки троугао са основом од 10 cm и одговарајућом висином од 12 cm, па њена површина изнноси:

$$B = \frac{10\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm}}{2} = 60\ \text{cm}^2.$$

Бочна површина призме састоји се од 3 бочна зида који су правоугаоници. Два од њих су подударна, са димензијама 13 cmи 18 cm, а трећи са димензијама 10 cm и 18 cm.

Зато је површина бочне површине износи

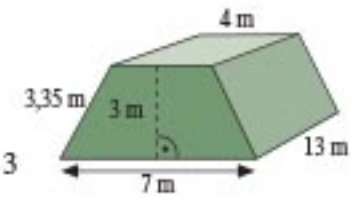
$$M = 2 \cdot 13\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} + 10\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 468\,\text{cm}^2 + 180\,\text{cm}^2 = 648\ \text{cm}^2.$$

Површина призме износи

$$P = 2B + M = 2 \cdot 60\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 120\,\text{cm}^2 + 648\,\text{cm}^2 = 768\ \text{cm}^2.$$

Пример 2

Израчунај површину призме дате на *цртежу* 3.



цртеж 3

Основа призме је трапез са површином

$$B = \frac{7\,\text{m} + 4\,\text{m}}{2} \cdot 3\,\text{m} = 16{,}5\,\text{m}^2.$$

Површина бочне површине износи

$$M = 7\ \text{m} \cdot 13\ \text{m} + 4\ \text{m} \cdot 13\ \text{m} + 2 \cdot 3{,}35\ \text{m} \cdot 13\ \text{m} = 230{,}1\ \text{m}^2$$

Према формули за израчунавање површине призме, добијамо

$$P = 2B + M = 2 \cdot 16{,}5\ \text{m}^2 + 230{,}1\ \text{m}^2 = 263{,}1\ \text{m}^2.$$

Задатак 1

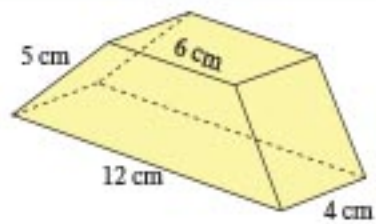
Израчунај површину призме са основом правоуглог троугла и катетима $a = 5$ cm и $b = 12$ cm, ако је висина $H = 17{,}4$ cm.

Задатак 2

Израчунај површину четвороугаоне призме са основом ромба чије су дијагонале $d_1 = 8$ cm и $d_2 = 6$ cm, ако је висина $H = 0{,}74$ dm.

Задатак 3

Кутија има облик и димензије као на *цртежу* 4. Израчунај површину картона који је потребан да би се направила кутија.



цртеж 4

Површина пирамиде

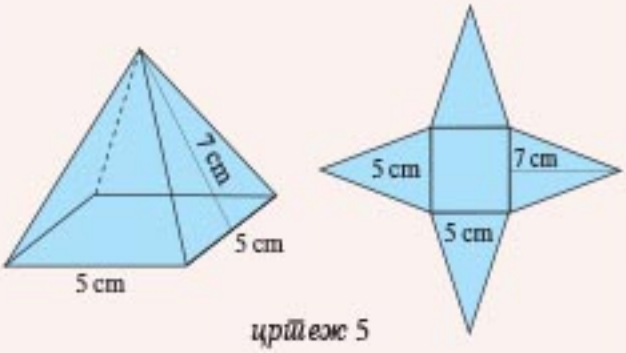
Активност

Разгледај пирамиду и њену мрежу дату на *цртежу* 5.

а) Од којих многоуглова је састављена мрежа четвороугаоне пирамиде?

б) Колики је збир површина свих многоугловс мреже пирамиде? Како се може одредити површина пирамиде?

в) Израчунај површину дате пирамиде помоћу њене мреже.



цртеж 5

Из дефиниције о пирамиди, и уопште из мреже пирамиде, уочава се да се њена површина може израчунати као збир површина свих зидова.

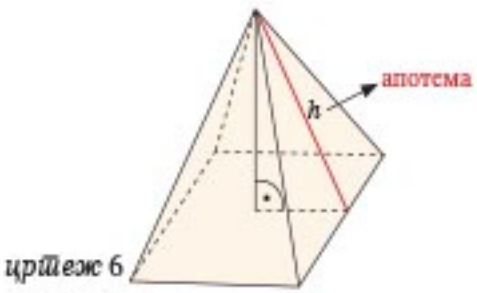
Површина пирамиде је збир површине основе и површине бочне површине-зида.

Према томе, површина пирамиде P се израчунава према формули:

$$P = B + M,$$

где је B површина основе, а M површина бочне површине-зида пирамиде.

Висина бочног зида спуштеног са врха правилне пирамиде до одговарајуће основне ивице основе назива се **апотема пирамиде** (*цртеж* 6).



цртеж 6

Пример 3

Израчунај површину правилне четвороугаоне пирамиде са основном ивицом $a = 12$ cm и апотемом $h = 16$ cm.

Основа пирамиде је квадрат чија је површина основе

$$B = a^2 = (12\text{ cm})^2 = 144\text{ cm}^2.$$

Бочна површина се састоји од 4 једнакокрака троугла са основом 12 cm и висином 16 cm. Њена површина износи

$$M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 12\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 384\ \text{cm}^2.$$

Према формули за израчунавање површине пирамиде, налазимо да је

$$P = B + M = 144\text{ cm}^2 + 384\text{ cm}^2 = 528\text{ cm}^2.$$

Пример 4

Површина бочном површином-зидом правилне троугласте пирамиде са основном ивицом $a = 12$ cm износи $M = 144$ cm². Израчунај апотему пирамиде.

Бочна површина троугласте пирамиде састоји се од 3 подударна једнакокрака троугла са основом $a = 12$ cm и апотемом h, коју треба израчунати. Површина бочне стране је $M = 3 \cdot \frac{ah}{2}$ из чега налазимо да апотема износи

$$h = \frac{2M}{3a} = \frac{2 \cdot 144\,\text{cm}^2}{3 \cdot 12\,\text{cm}} = \frac{288\,\text{cm}^2}{36\,\text{cm}} = 8\ \text{cm}.$$

Задатак 4

У продавници за декорације продаје се стаклени украс у облику шестоугаоне пирамиде. Укупна површина украса је 900 cm². Сваки бочни зид има површину од 100 cm².

а) Колико бочних зидова има пирамида?

б) Колика је површина основе?

в) Ако је основа правилан шестоугао, колика је дужина ивице основе?

Пример 5

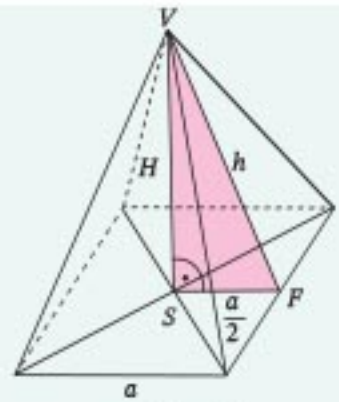
Израчунај површину правилне четвороугаоне пирамиде са основном ивицом $a = 5$ cm и висином $H = 6$ cm.

Из правоуглог троугла FSV, користећи Питагорину теорему, израчунаћемо апотему (*цртеж 7*)

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (2{,}5\,\text{cm})^2} = \sqrt{42{,}25\,\text{cm}^2} = 6{,}5\,\text{cm}.$$

Према формули за израчунавање површине пирамиде, налазимо да

$$P = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = (5\,\text{cm})^2 + 2 \cdot 5\,\text{cm} \cdot 6{,}5\,\text{cm} = 90\ \text{cm}^2.$$



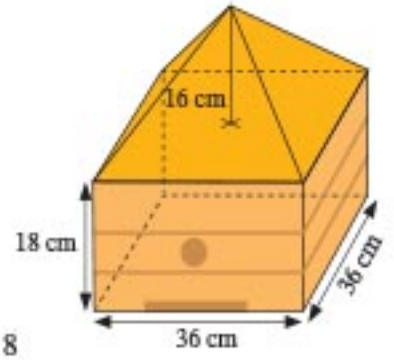
цртеж 7

Задатак 5

Један шатор за камповање има облик правилне четвороугаоне пирамиде. Висина шатора је 3 m, а апотем је 5 m. Колико квадратних метара земље је потребно за постављање шатора?

Задатак 6

Пчелар је направио сандук за пчеле у облику квадра са поклопцем у облику пирамиде (*цртеж* 8). Цео сандук треба да се обоји специјалном водоотпорном бојом ради заштите од кише. Колико кантица боје ће бити потребно да се обоји цела спољашња површина сандука, ако једном кантицом боје може да се обоји 150 cm²?

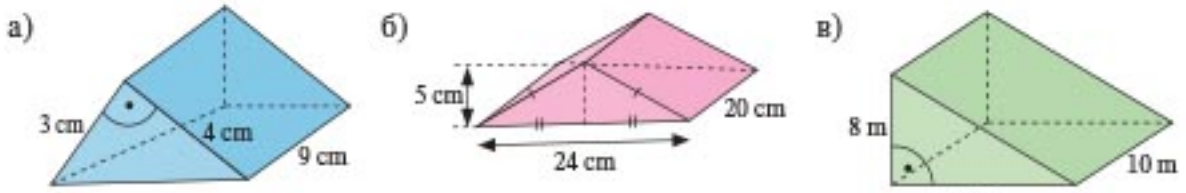


цртеж 8

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

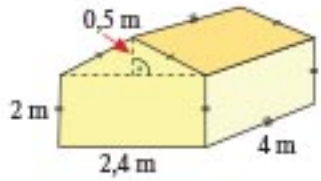
1. Бочна површина правилне шестоугаоне призме је 660 cm², а висина је 10 cm. Израчунај површину основе.

2. Израчунај површине призми датих на *цртежу* 9:



цртеж 9

3. Ботаничка башта приказана на *цртежу* 10 је направљена од пластичне фолије која кошта 350 денара по квадратном метру. Колико укупно кошта пластична фолија?



цртеж 10

4. Напиши формулу за израчунавање површине:
а) правилне троугласте пирамиде, б) правилне шестоугаоне пирамиде.

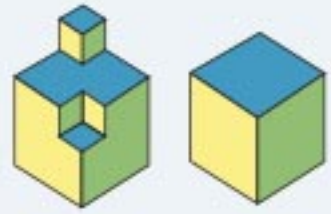
5. Амбалажа за чоколадно млеко направљена од картона има облик тетраедра са страницама 10 cm. Колика је површина картона од ког је направљена кутија?

6. Кров има облик правилне шестоугаоне пирамиде са апотемом од 2 m и ивицом основе од 2 m. Колико табли лима је потребно за кров, ако је површина једне табле 2 m²?

7. Ученици твоје школе учествују у такмичењу за дизајнирање еколошке туристичке атракције. Тим треба да дизајнира павиљон у облику пирамиде који ће бити изграђен од рециклираног стакла. Пирамида има основу правилног шестоугла са страницом од 2 m, а апотема је 3 m. Колика ће бити цена употребљеног стакла ако квадратни метар кошта 1200 денара?

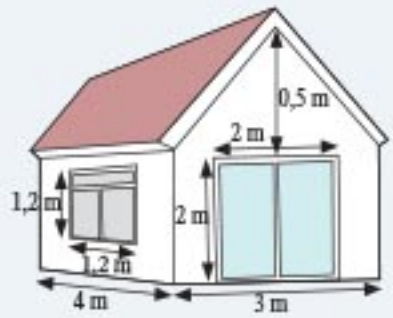
Истраживање

1. Део коцке који је издвојен постављен је изнад ње (*цртеж* 11). Упореди површине ова два тродимензионална тела. Да ли су једнаке? Образложи свој одговор.



цртеж 11

2. Да би направио/ла мала кућица за чување алата, потребне су дрвене даске, стакло и лим. Димензије кућице су приказане на *цртежу* 12. Зидови и кров су од дрвета, врата су од лима, а на прозору је постављено само стакло. Израчунај колики би требало да буде буџет за материјал потребан за изградњу кућице.
Распитај се о ценама у одговарајућим продавницама или на интернету. Истражи који су други материјали потребни (на пример, за спајање грађевинских елемената, за премазивање и заштиту и сл.)



цртеж 12

13. ЗАПРЕМИНА ПРИЗМЕ И ПИРАМИДЕ

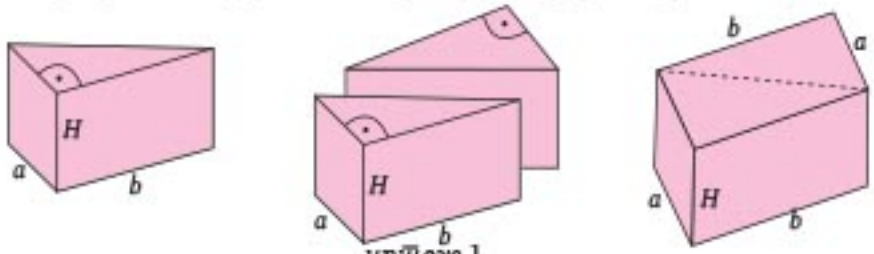
Запремина призме

Активност

Нађи запремину кутије за житарице или неког другог предмета у облику квадра из свакодневног живота. Колика је запремина?

Проследимо кораке који воде до формуле за израчунавање запремине призме.

1. Нађи запремину призме чија је основа правоугли троугао (*цртеж* 1).



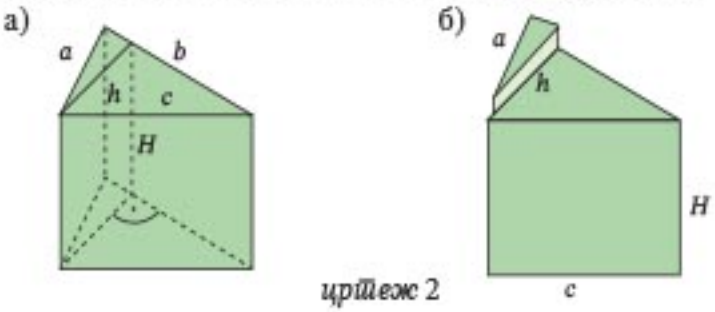
цртеж 1

Према *цртежу* 1, запремина дате троугласте призме може се израчунати као половина запремине квадра са димензијама a, b и H, односно

$$V = \frac{a \cdot b \cdot H}{2} = \frac{a \cdot b}{2} H = B \cdot H$$

где је B површина основе призме (правоугли троугао), а H је висина призме.

2. Нађи запремину призме са основом произвољног троугла (*цртеж* 2).



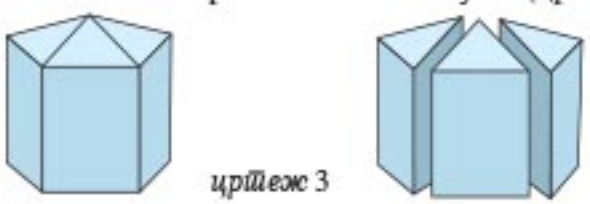
цртеж 2

Овај случај сводимо на претходни, цртањем једне од висина основе. На овај начин добијамо два правоугла троугла са једном заједничком катетом.

Сада је троугаона призма подељена на две троугаоне призме са основама у облику правоуглих троуглова, па ће њена запремина бити збир запремина те две призме.

$$V = V_1 + V_2 = B_1 \cdot H + B_2 \cdot H = (B_1 + B_2) \cdot H = B \cdot H.$$

3. Нађи запремину призме са основом произвољног многоугла (цртеж 3).



цртеж 3

У случају када је основа призме произвољни многоугао, повлачимо све дијагонале из једног темена многоугла. На овај начин, многоугао је подељен на коначано много троуглова. За сваки од добијених троуглова примењујемо поступке које смо претходно разгледали. Слично као горе, добијамо да је

$V = B \cdot H$.

Запремина призме једнака је производу површине основе и висине призме.

Према томе, запремина призме V се израчунава према формули:

$V = B \cdot H$,

где је B површина основе, а H висина призме.

Пример 1

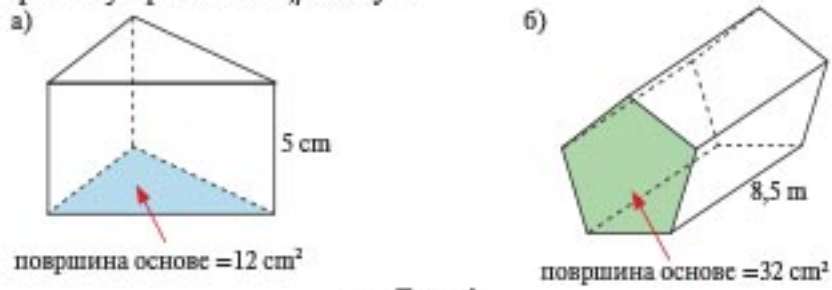
Израчунај запремину призме са основом троугла и страницом $a = 4$ cm и висином $h = 5$ cm, ако је висина призме $H = 6$ cm.

Према формули за израчунавање запремине призме, добијамо да је

$$V = B \cdot H = \frac{a \cdot h}{2} \cdot H = \frac{4\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 60\ \text{cm}^3.$$

Задатак 1

Израчунај запремину призми на *цртежу* 4:



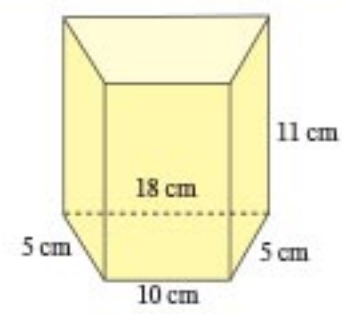
цртеж 4

Задатак 2

Амбалажа за чоколаду има облик правилне троугласте призме са основном ивицом дужине 5 cm и висином од 18 cm. Колика је запремина посуде?

Пример 2

Израчунај запремину четвороугаоне призме са основицом једнакокраког трапеза са основицама $a = 18$ cm, $b = 10$ cm и катетом $c = 5$ cm, ако је висина $H = 11$ cm (*цртеж* 5).



цртеж 5

Прво ћемо одредити висину трапеза, која је основа призме (цртеж 6).

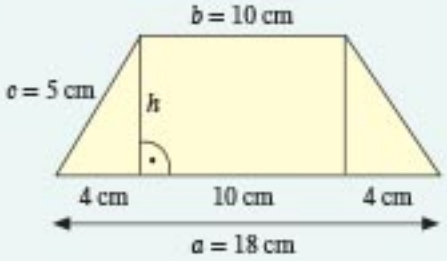
$$h=\sqrt{(5\,\text{cm})^2-(4\,\text{cm})^2}=\sqrt{25\,\text{cm}^2-16\,\text{cm}^2}=\sqrt{9\,\text{cm}^2}=3$$

Према формули за израчунавање површине трапеза, за површину основе добијамо

$$B=\frac{a+b}{2}h=\frac{18\,\text{cm}+10\,\text{cm}}{2}\cdot 3\,\text{cm}=42\ \text{cm}^2.$$

Према формули за израчунавање запремине призме, добијамо

$$V=B\cdot H=42\ \text{cm}^2\cdot 11\ \text{cm}=462\ \text{cm}^3.$$



цртеж 6

Задатак 3

Израчунај запремину призме са основом делтоида и дијагоналама $d_1 = 24$ cm и $d_2 = 13$ cm, ако је висина $H = 7{,}2$ cm.

Активност

Како можеш из формуле $V = B \cdot H$ да израчунаш:
а) површину основе B, ако су дате V и H, б) висину H, ако су дате V и B?

Пример 3

У мали акваријум облика правилне четвороугаоне призме сипано је 8,4 l воде до висине $H = 2{,}1$ dm. Колика је основна ивица акваријума?

Основа правилне четвороугаоне призме је квадрат. Према формули за израчунавање запремине призме, добијамо да је

$V = B \cdot H = a^2 \cdot H$

Дакле, за дужину основне ивице, налазимо да је

$$a=\sqrt{\frac{V}{H}}=\sqrt{\frac{8{,}4\,\text{dm}^3}{2{,}1\,\text{dm}}}=\sqrt{4\,\text{dm}^2}=2\,\text{dm}\qquad(1\ l=1\ \text{dm}^3).$$

Задатак 4

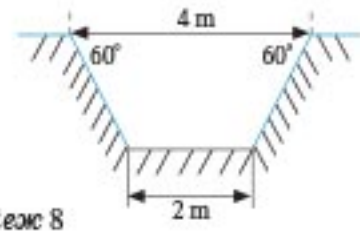
На *цртежу* 7 приказан је акваријум са његовим димензијама. Површина воде у акваријуму је 5 cm испод висине акваријума. Колико литара воде има у акваријуму?



цртеж 7

Задатак 5

При изградњи пута на терену који обилује водом, било је потребно ископати канал у који ће се одлевати вода. Његов попречни пресек приказан је на *цртежу* 8. Колико је кубних метара земље је извађено приликом копања канала, ако је канал дуг 2 km?



цртеж 8

Запремина пирамиде

Активност

Направи од картона модел призме и пирамиде са подударним основама и једнаким висинама. Затим напуни пирамиду водом (песком, пиринчем или шећером) и сипај целу количину у призму. Понављај поступак док не напуниш призму.
Шта примећујеш?

Запремина пирамиде једнака је једној трећини производа површине основе и висине пирамиде.

Према томе, запремина пирамиде V се израчунава према формули:

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

где је B површина основе, а H висина пирамиде.

Пример 4

Колико кубних метара је запремина Велике Кеопсове пирамиде, која је висока 150 m и чија је основа квадрат са страницом дугом 230 m?

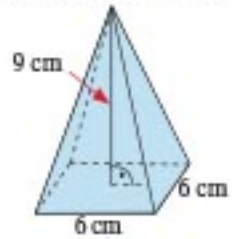
Према формули за израчунавање запремине пирамиде, добијамо

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (230\ \text{m})^2 \cdot 150\ \text{m} = 2645000\ \text{m}^3.$$

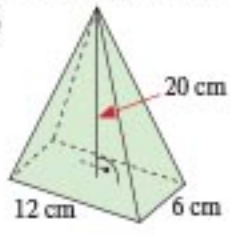
Задатак 6

Израчунај запремину пирамида датих на *цртежу* 9:

а)



б)



в)



цртеж 9

Активност

Како можеш из формуле $V=\frac{1}{3}B\cdot H$, израчунати:

а) површину основе B, ако су дати дати V и H, б) висину H, ако су дати V и B?

Пример 5

Израчунај висину пирамиде запремине 12 cm^3 и површине основе 4 cm^2.

Из формуле за израчунавање запремине пирамиде, налазимо да је

$$H=\frac{3\cdot V}{B}=\frac{3\cdot 12\ cm^3}{4\ cm^2}=9\ cm.$$

Задатак 7

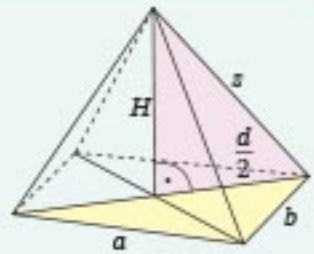
Израчунај површину основе пирамиде са запремином 8 cm^3 и висином $H=2$ cm.

Пример 6

Израчунај запремину пирамиде са правоугаоном основом са димензијама $a=24$ cm и $b=32$ cm, ако је бочна ивица 25 cm.

Дијагонала основе пирамиде је

$$d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{576\ cm^2+1024\ cm^2}=\sqrt{1600\ cm^2}=40\ cm.$$



цртеж 10

Из правоуглог троугла који је формиран од половине дијагонале правоугаоне основе, бочне ивице и висине пирамиде, добија се висина пирамиде (*цртеж* 10)

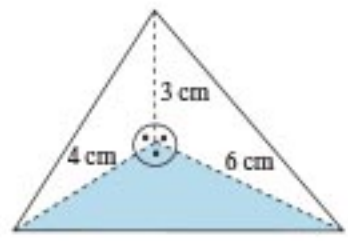
$$H=\sqrt{s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}=\sqrt{(25\ cm)^2-(20\ cm)^2}=\sqrt{625\ cm^2-400\ cm^2}=\sqrt{225\ cm^2}=15cm.$$

Према формули за израчунавање запремине пирамиде, налазимо да запремина износи

$$V=\frac{BH}{3}=\frac{abH}{3}=\frac{24\ cm\cdot 32\ cm\cdot 15\ cm}{3}=3840\ cm^3$$

Задатак 8

Столар одсеца комад дрвета у облику троугласте пирамиде од другог комада дрвета, који је био у облику квадра. Димензије исеченог комада дрвета су дате на *цртежу* 11. Израчунај његову запремину.

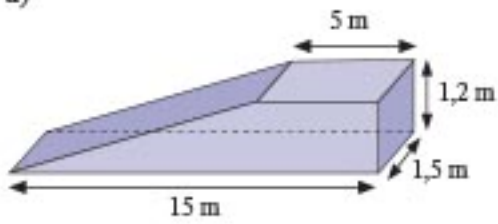


цртеж 11

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

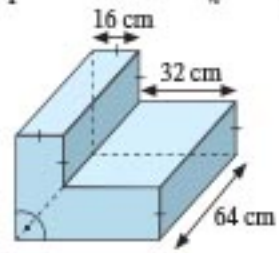
1. Израчунај запремину бетона која је потребна за изградњу:
а) рампе приказане на *цртежу* 12а, б) степеница приказаних на *цртежу* 12б.

а)



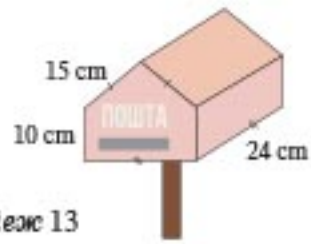
цртеж 12а

б)



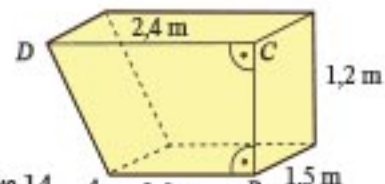
цртеж 12б

2. а) Израчунај запремину ваздуха у поштанском сандучету (*цртеж* 13).
б) У поштанско сандуче су стављене три коверте димензија 23cm x 12 cm x 5 mm. Колика је запремина неискоришћеног простора у поштанском сандучету?



цртеж 13

3. На *цртежу* 14 је дат контејнер за компостирање.
Колико кубних метара компоста може да прими контејнер?



цртеж 14

4. Колика је запремина призме чија је основа једнакокраки трапез са страницама $a = 7\frac{1}{2}$ cm, $b = 8\frac{1}{3}$ cm, $c = 2\frac{2}{3}$ cm, ако је висина $H = 5$ cm?

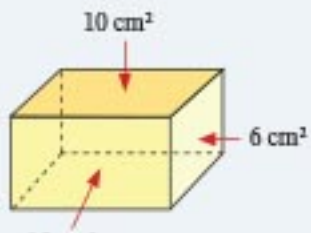
5. Запремина правилне четвороугаоне пирамиде је 810 cm^3, а висина је 30 cm. Наћи основну ивицу пирамиде.

6. Правилна четвороугаоне пирамида има висину $H = 6$ cm и апотему $h = 10$ cm. Израчунај површину и запремину пирамиде.

7. Колико литара кишнице сакупља резервоар за воду у облику пирамиде са правоугаоном основом димензија 2,4 m, 3,2 m и бочном ивом од 2,5 m?

Истражување

Израчунај запремину квадра на *цртежу* 15 ако су дате површине његових зидова.



цртеж 15

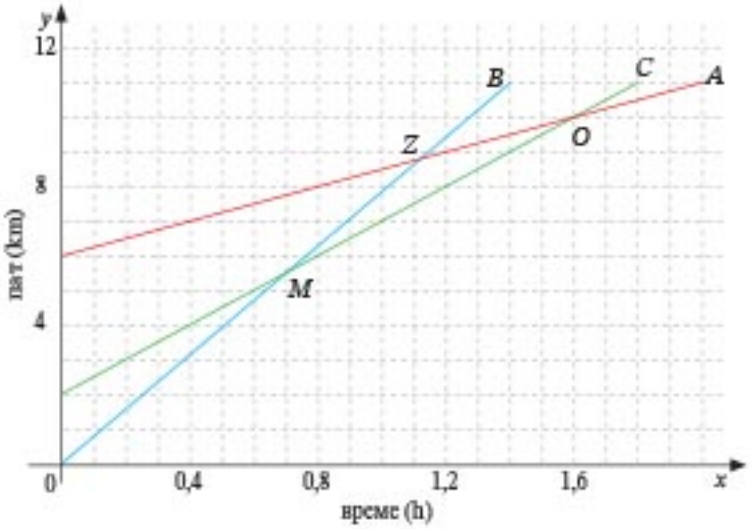
ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Претвори: 10 година 9 месеци 20 дана 15 сати у:
   а) године, б) месеце, в) дане, г) сате.

2. Мими има $12\frac{3}{4}$ година, а Еми $9\frac{1}{6}$ година.
   а) Колико је година свака од њих имала пре 10 месеци?
   б) Колико је година Мими старија од Еми?

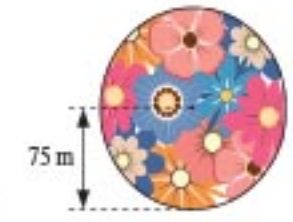
3. Нацртај графикон који приказује путању камиона који напушта град А у 9 часова ујутру, после два сата вожње прави паузу од пола сата, а у 14 часова стиже у град Б, који је удаљен 250 km од града А. Тамо остаје 1 сат. Затим креће назад, вози без пауза и стиже у град А у 19 часова.

4. Три групе туриста, А, В и С, иду у панорамски обилазак града аутобусом. Тачка М је историјски музеј, тачка Z је зоолошки врт, а тачка О је зграда опере (*цртеж* 1).
   а) Колико су удаљени зграда оперске куће и историјски музеј?
   б) Која од група није прошла поред оперске куће?
   в) Испред ког објекта су прошле групе В и С?
   г) Која група се возила најбрже, а која најспорије кроз град?
   д) Која група је прешла најдужи, а која најкраћи пут?
   ђ) Колико је времена требало групи С да пређе пут од историјског музеја до опере?



цртеж 1

5. Наталија жели да огради своју башту са цвећем (*цртеж* 2).
   Колико метара ограде ће Наталији бити потребно?



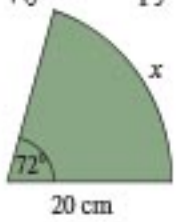
цртеж 2

6. Од танке жице, дужине 1 m, Сања хоће да направи алке за огрлицу које су кружног облика, тако да свака алка има пречник 1 cm. Колико алки може да направи Сања и колика ће бити дужина њене огрлице?

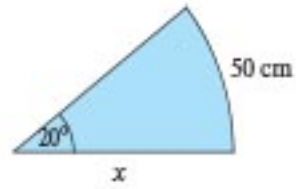
7. Казаљка на сату која показује минуте је дуга 6 cm. Колики пут ће прећи врх те казаљке од поднева до 13:30 h?

8. Израчунај елементе означене са x на *цртежу* 3.

а) x - дужина кружног лука



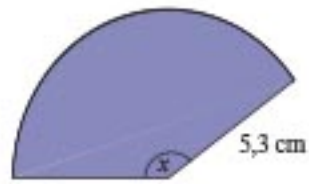
б) дужина кружног лука = 50 cm



в) дужина кружног лука = 10π cm

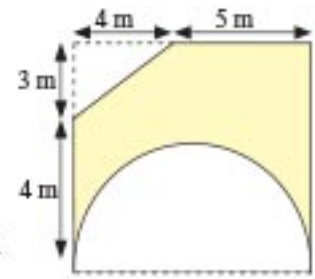


г) дужина кружног лука = 22,81 cm



цртеж 3

9. Израчунај обим облика датог на *цртежу* 4.



цртеж 4

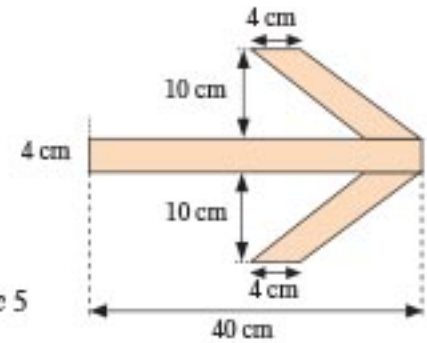
10. Колика је процена за површину пода лифта:
а) 3 mm^2, б) 3 cm^2, в) 3 m^2, г) 3 ha.

11. Напиши најприкладнију меру којом ћеш изразити површине за:
а) DVD-а, б) тениски терен, в) новчић од 1 денара, г) Шпанију.

12. Леонид је мајстор за израду украса од дрвета. Он има комад дрвета у облику ромба са обимом од 96 dm и растојањем између супротних страница од 10 dm. Има кантицу боје за дрво од 400 ml са ознаком „Користити 50 боје на квадратни дециметар".
Да ли Леонид има довољно боје да би два пута премазао површину комада дрвета?

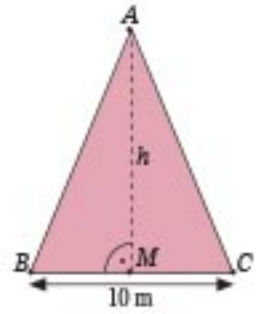
13. Колику висину има паралелограм површине 840 cm^2 ако је једна од његових страница 3,5 dm?

14. Израчунај површину стрелице на *цртежу* 5.



цртеж 5

15. Израчунај површину троугла на *цртежу* 6, ако је $h = 14$ m.



цртеж 6

16. Ако је површина троугла 63 cm², одреди висину троугла која је повучена до странице $a = 18$ cm?

17. Канцеларијски сто има облик трапеза са паралелним страницама $a = 160$ cm и $b = 120$ cm, а растојање између њих је 50 cm. Колико ће коштати прекривање стола стаклом ако је цена 1200 денара за квадратни метар?

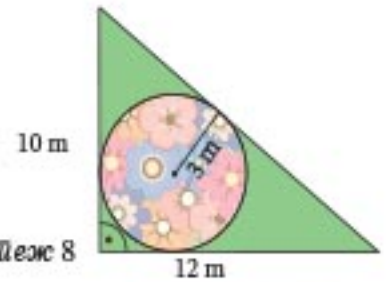
18. Квадрат са дијагоналом од 12 cm има исту површину као делтоид са једном дијагоналом од 16 cm. Колика је друга дијагонала делтоида?

19. Чија је пица већа, Иванова или Јованова (*цртеж* 7)?



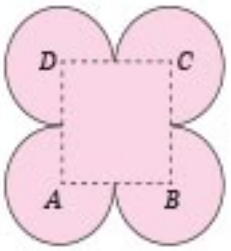
цртеж 7

20. Травњак у парку има облик троугла, а у њему је засађена цветна леја у облику круга (*цртеж* 8). Израчунај површину травнатог дела.



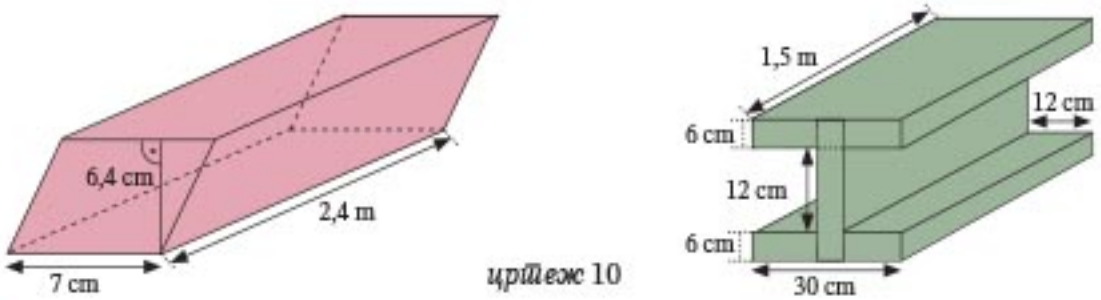
цртеж 8

21. Израчунај обим и површину фигуре на *цртежу* 9, ако квадрат *ABCD* има дужину странице 7 cm.



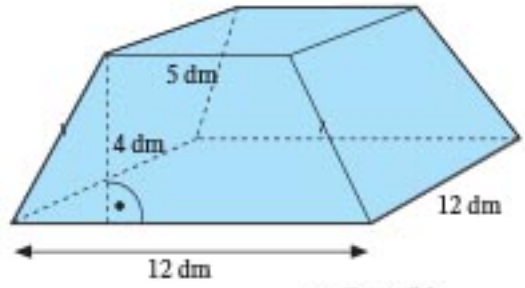
цртеж 9

22. На *цртежу* 10 приказани су грађевински материјали. Израчунај њихову површину и запремину.
а) дрвена греда б) метални носач страна



цртеж 10

23. Пластична посуда за воду има облик и димензије приказане на *цртежу* 11. Израчунај површину пластике потребну за израду посуде (горња страна је отворена).
Колико литара воде може да стане у посуду ако се потпуно напуни?



цртеж 11

24. Кров дрвене колибе је пирамида са квадратном основом. Дужина странице основе је 22 dm, а апотема је 14 dm. Петар би хтео да офарба кров своје дрвене колибе и хоће да зна колико боје треба да купи. Ако 1 кутија боје покрива 400 dm^2, колико кутија боје треба да купи Петар?

25. Кутија боје коју Петар користи за фарбање своје колибе има облик пирамиде, са основом једнакокраког троугла, површином од 50 cm^2 и висином од 18 cm.
Колико милилитара боје се налази у кутији?



Тема 5:

РАД СА ПОДАЦИМА

Резултати учења:

Проучавајући ову тему, оспособићеш се да:

- креираш детаљан и образложен план истраживања који ће укључивати избор узорка према различитим обележјима и анализу података.
- презентујеш и тумачиш резултате истраживања, укључујући представљање помоћу дијаграма, табела и одређивање ранга, мода, медијане и аритметичке средине.
- решаваш различите врсте проблема (за игре на срећу, економске проблеме или статистичке анализе), укључујући догађаје који су ексклузивни и узастопни.

1. ПОПУЛАЦИЈА И УЗОРАК

Активност

Прикупи податке о резултатима постигнутим на последњем тесту из математике за ђаке у твом разреду и представи их у табели. Како си прикупио/ла податке?

Пре него што прикупимо податке за студију, прво морамо размотрити циљну **популацију**. То је група предмета, појава или људи о којима желимо да добијемо информације.

Популација је скуп свих елемената (јединки, карактеристика, резултата) неке појаве који имају заједничку карактеристику.

Заједничка карактеристика елемената популације која је предмет посматрања (мерења, испитивања) назива се **обележје**.

Један елемент (објекат, јединица) из популације назива се статистичка јединица популације.

Пример 1

Која је популација, која је статистичка јединица и које су карактеристике популације при посматрању или истраживању:
а) пол, узраст, запосленост становника једног града,
б) маса, узраст, раса крава на фарми,
в) претплата, висина рачуна корисника услуга телекомуникационе компаније.

а) Ако се посматрају становници града:
- популација су сви становници,
- статистичка јединица је један становник,
- карактеристике јединице могу бити: пол, запосленост, старост, место рођења, боја очију, висина итд.

б) Ако се посматрају краве на фарми:
- популација су све краве на тој фарми,
- статистичка јединица је једна крава на тој фарми,
- карактеристике јединице могу бити: количина млека у литрима коју једна крава даје дневно, старост, раса, маса итд.

в) Ако се посматрају корисници услуга телекомуникационе компаније:
- популација су сви корисници те компаније,
- статистичка јединица је један корисник.

- карактеристике јединице могу бити: врста претплате (претплата, постпејд), број телефонских позива обављених током одређеног временског периода, трајање телефонских позива, износ издатих рачуна, старосна структура, полна структура претплатника и слично.

Из датих примера можеш видети да су карактеристике променљиве величине и да се вредност посматране карактеристике појединца не може унапред одредити.

Приликом прикупљања података можемо користити попис или узети узорак. Попис значи да прикупљамо податке за сваку особу у популацији. На пример, можемо извршити попис производа у продавници или попис становника једне земље.



Пример 2

Енес би хтео да сазна просечну висину ђака у својој школи.
а) Колика је популација и које су карактеристике те популације?
б) Објасни како је Енес то могао да уради практичније да би уштедео време и новац.

а) Популација се састоји од свих ђака у школи. Да би Енес сазнао просечну висину ђака, попис би подразумевао мерење висине сваког ђака у његовој школи. Висина је карактеристика популације.

б) У зависности од укупног броја ђака у школи, мерење висине сваког ђака би одузимало много времена и било веома непрактично. Економичније је, у смислу времена и ресурса, за истраживање узети узорак популације. У зависности од укупног броја ученика, Енес може по случајном избору одаберати довољан број ђака из своје школе и измерити њихову висину.

Узорак је подскуп популације.

Задатак 1

Одреди да ли би се користила цела популацију или узорак за истраживање:
а) старости људи у тржном центру,
б) масу кованица произведених у фабрици за ковање новца,
в) цене артикла са менија у ресторану.

Када се узима узорак популације, прикупљање података је брже и једноставније него рад са целом популацијом, али није толико детаљно нити тачно.

Пошто узорци не пружају информације о целокупној популацији, статистички подаци добијени из узорка могу се користити само за **процену** статистике о популацији.

Да би процена стварног стања била поуздана, узорак треба да буде **репрезентативан**. Да би се постигла репрезентативност узорка, следећи услови треба да буду испуњени:

- Избор статистичких јединица треба да буде случајан и независан и свака јединица треба да има једнаке шансе да би била изабрана.
- Узорак треба да буде довољно велики у односу на популацију коју представља.
- Узорак треба да правилно (верно) представља целокупну популацију.

Пример 3

Одговори на следећа питања у вези са истраживањем које Енес треба да спроведе у примеру 2:

а) Како би Енес требало да поступи при избору узорка да би био сигуран у поузданост резултата свог истраживања?

б) Које су предности и који су недостаци ако Енес изабере узорак уместо целе популације?

а) Узорак који ће Енес одабрати треба да испуњава све услове дате горе у лекцији. На пример, ако у његовој школи има 900 ђака, било би довољно да узорак има 45 ђака. Избор сваког ђака у узорку треба да буде случајан и независан и сваки ђак треба да има једнаке шансе да буде изабран. Исто тако, узорак по својој структури треба да одговара целокупној популацији ђака.

- Енесов узорак неће бити репрезентативан уколико одабере узорак ђака само из деветог разреда, јер тада није прикладан за све ученике у школи. Просечна висина узорка била би много већа од просечне висине **свих** ученика у школи.
- С друге стране, ако Енес одабере само 5 ђака, просечна висина узорка би била неадекватна процена просечне висине свих ђака, јер је узорак веома мали.

б) Коришћење узорка има своје предности, односно прикупљање података је брже, једноставније и економичније у односу на време и друге ресурсе, али са друге стране пружа процену популације и није толико детаљно као када би се користила цела популација.

Задатак 2

У табели су дати примери одабраног узорка у вези са истраживањем дате карактеристике дате популације. Објасни да ли је предложени узорак репрезентативан, а затим, где је потребно, наведи узорак за који верујеш да ће дати бољи резултат.

становништво	карактеристика	узорак
ученици наше земље	спорт	по једна насумично изабрана основна и средња школа
тостери произведени у једној фабрици	исправност	насумично изабран један од стотину производа по серијском броју
сви атоми у атмосфери	проценат водоника	мерења спроведена у Скопљу
производи у једној продавници	број производа	цела популација

Задатак 3

Једна школа има 820 ђака. 40 ђака је насумично изабрано да попуне анкету о својој школској униформи.

а) Пронађи величину:

1) циљне популације,
2) узорка.

б) Објасни зашто подаци прикупљени на сваки од следећих начина можда неће дати узорак који је реална слика популације:

1) Ђак који спроводи анкету замолио је својих десет најбољих пријатеља да попуне анкету
2) Сви ђаци у разреду су анкетирани.
3) Добровољци се пријављују да попуне анкету.

Задатак 4

Компанија за електронске уређаје жели да спроведе истраживање о томе да ли људи више купују такве уређаје у продавници или преко интернета. Они испитују људе који стоје испред једне продавнице електронских уређаја у понедељак ујутру. Објасни зашто подаци који ће бити прикупљени вероватно неће одговарати стварном стању.

Задатак 5

Фабрика електричних апарата производи 15 000 апарата дневно. Као руководилац фабрике, твој задатак је да истражиш колико је произведених апарата неисправно.

а) Одреди популацију, карактеристике и предложи избор узорка.

б) Које су предности а који су недостаци рада са узорком уместо са целом популацијом?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Школска продавница жели да уведе нову здраву ужину. Директор одлучује да спроведе мало истраживање како би сазнао које ужине се ђацима у школи највише допадају. Да би то урадио, потребно је да помогнеш групи ђака који ће спроводити истраживање
   а) Која је популација а која карактеристика у овој анкети?
   б) Објасни предности и недостатке пописа као методе која се користи у овом случају.
   в) Понуди најмање два различита начина за избор узорка ђака који ће представљати популацију?
   г) Од понуђених узорака, изабери онај који најбоље представља целу популацију и објасни зашто мислиш да је баш тај узорак репрезентативан.

2. Школа „Свети Ћирило и Методије" има 700 ђака. Директор жели да сазна колико ђака у школи редовно практикује неки спорт.
   а) Која је популација у овом истраживању?
   б) Која је карактеристика која се проучава?
   в) Који од следећих описа представља узорак ове популације, а који не? Објасни свој одговор.
      1) Сви ученици VI разреда (85 ђака).
      2) Десет ђака из сваког разреда у школи (од I до IX разреда, укупно 90 ђака).
      3) Сви наставници у школи.
      4) Првих 50 ђака који су ушли у школску библиотеку у уторак ујутру.
   г) Директор разматра да ли да анкетира свих 700 ђака или да узме узорак од 120 ђака.
      1) Наведи две предности анкетирања свих 700 ђака.
      2) Наведи две мане анкетирања свих 700 ђака.

3. Фабрика за производњу лампи производи 50 000 лампи дневно. Контролор квалитета жели да провери издржљивост лампи (Издржљивост се тестира тако што се лампа остави да непрекидно гори и бележи време док не прегори). Да би то урадио, тестира 200 лампи из дневне производње.
   а) Која је популација у овом истраживању, шта је узорак и која је карактеристика која се проучава?
   б) Објасни који од следећих описа представља узорак ове популације, а који не.
      1) 200 тестираних лампи из дневне производње.
      2) Све лампе произведене у првом сату рада фабрике.
      3) Све лампе произведене у једном дану.
      4) Облик лампи које се тестирају.
      5) Првих 100 лампи које су изашле са производне траке после паузе радника.
   в) Контролор квалитета разматра да ли да тестира свих 50 000 сијалица (целу популацију) или да узме узорак од 500 сијалица.
      1) Наведи две предности тестирања свих 50 000 сијалица.
      2) Наведи два недостатка тестирања свих 50.000 сијалица.

4. Одреди да ли у истраживању треба користити попис или узорак:
   а) узраст људи који су посетили национални парк,
   б) исправност батерија произведених у фабрици,
   в) цене услуга у салону лепоте.

5. Руководилац аутобуске станице жели да спроведе истраживање како би видео да ли су људи задовољни њиховим услугама. Одлучује да пита првих 10 људи који стигну на аутобуску станицу у среду ујутру.
   а) Да ли је изабрао добар узорак? Објасни свој одговор.
   б) Како би могао да побољша свој метод у прикупљању података?

6. Једне новине су позвале читаоце да одговоре на телефонску анкету у вези са безбедношћу саобраћаја у граду. Анкетирано је 40 испитаника.
   а) Да ли је избор узорка на овај начин прикладан? Објасни свој одговор.
   б) Наведи неколико разлога зашто резултати ове анкете нису поуздани и предложи измене како би се добио репрезентативан узорак.

7. Ђаци из еколошког клуба би хтели да сазнају какав је квалитет ваздуха око њихове школе. Они имају мали уређај који мери концентрацију честица у ваздуху (PM-честица). Уређај могу поставити на различитим локацијама по дворишту и улицама у околини.
   а) Која је популација, узорак и карактеристика овог истраживања?
   б) Опиши најмање два различита узорка која могу да се узму из исте популације?
   в) Објасни предности и недостатке мерења квалитета ваздуха на свакој могућој локацији око школе (попис).
   г) Изабери узорак за који сматраш да је најрепрезентативнији за целу популацију и објасни зашто.

Истраживање

Сви ми готово свакодневно проверавамо временску прогнозу. Истражи како метеоролози припремају временску прогнозу.
Процени да ли су следеће изјаве веродостојне и образложи свој одговор:

а) Просечна температура у граду данас је 25 °C (мерено са 2 термометра).
б) Јул је најтоплији месец у години (на основу 10-годишњих мерења).
в) Данас ће падати киша у свим деловима града (прогноза на основу сателитских снимака).
г) Објасни одговоре на следећа питања:
- Зашто метеоролози постављају термометре на различитим висинама и локацијама?
- Како величина узорка утиче на тачност временске прогнозе?
- Шта би се десило ако би користили само мерења са једног термометра за цео град?

2. ДИСКРЕТНИ ПОДАЦИ. ТАБЕЛА ФРЕКВЕНЦИЈА

Активност.

а) Која је популација и која је њена карактеристика у сваком од датих примера?
б) Како су изражене карактеристике у сваком од примера (бројем, описом, категоријом)?
1) На систематском прегледу измерена је висина ђака у једном одељењу.
2) У ботаничкој башти је забележена боја цветова неколико врста цвећа.
3) У фабрици за производњу фрижидера проверава се исправност добијених производа.

Према начину изражавања, карактеристике могу бити веома различите. Ако је карактеристика изражена **описно**, кажемо да је то **квалитативна карактеристика.** Ако је карактеристика изражена **бројем**, онда кажемо да је то **квантитативна карактеристика.**

Пример 1

Да ли су квалитативне или квантитативне карактеристике активности дате на почетку часа?

1) У овом случају, карактеристика је изражена бројем јер се ради о висини ђака, која може бити било који број из интервала вредности.
Значи, карактеристика је квантитативна.
2) Боја цветова је квалитативна карактеристика јер је изражена описно.
3) Карактеристика је квалитативна и може се описно изразити са две категорије: исправан или неисправан производ.

Пример 2

Које бројне вредности се могу користити за изражавање следећих карактеристика:
а) дужина атлетске стазе,
б) време путовања у сатима,
в) број чланова породице,
г) висина дрвећа,
д) број изостанака из школе.

У случајевима под а), б), г) дате карактеристике могу имати вредности неког интервала, на пример дужина атлетске стазе може бити 234 m.
Ови подаци се прикупљају **мерењем.**

Карактеристике под в) и д) могу имати вредности као што су 1, 2, 3, ... тј. природни бројеви. Ови подаци се првенствено прикупљају **бројањем.**

Дискретни подаци су подаци који могу да имају само одређене, пребројиве вредности.

Други примери дискретних података су: број ђака, број аутомобила, величина одеће изражена као број и слични њима, односно подаци који имају тачну, прецизну, јасно дефинисану вредност која се зна са сигурношћу.
За разлику од њих, људска висина, температура ваздуха, телесна маса и други могу бити било који децимални број из неког интервала вредности.

Задатак 1

Који од следећих података су дискретни:
а) време у минутима тркача у једној трци,
б) број пешачења у току једне недеље становника једног насеља,
в) број производа који се купују у маркету,
г) дужина стопала тринаестогодишњака,
д) дебљина књига у школској библиотеци,
ђ) дужина боравка у хотелу изражена бројем пуних пансиона?

Неуређени подаци, посебно ако је њихов број велики, не говоре много о популацији која се истражује. Зато је потребно да се среде. Прво што треба да се уради јесте њихово распоређивање, на следећи начин:

- подаци чије су вредности дате описно (речима) класификују се у категорије;
- подаци чије су вредности дате нумерички (бројевима) распоређују се по величини, од најмање до највеће;
- подаци чије су вредности дате нумерички (бројевима) и имају мали број поновљених вредности групишу се у интервале у табели.

У сва три случаја, ради лакшег сређивања, непосредно поред вредности (резултата) свако понављање истог податка означава се знаком (цртицом).

Пример 3

Приликом истраживања брзине реакције групе од 10 ђака, добијени су следећи подаци:

ђак	Перо	Томе	Ана	Ристо	Кире	Симе	Ема	Илир	Ајше	Иле
брзина реакције	брзо	споро	брзо	брзо	брзо	споро	брзо	брзо	споро	брзо

Среди податке у табели.

Подаци (резултати) су дати без икакве систематичности и прегледности. Бројањем се утврђује која вредност се (брза, спора) колико пута јавља. Састављамо следећу табелу:

брзина реакције	знак	број ђака
брза реакција	𝍸 ||	7
спора реакција	|||	3

Задатак 2

Приликом једног истраживања о доминантној руци у раду са 16 деце у једном одељењу основне школе, добијени су следећи подаци:

дете	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
доминатна рука	десна	десна	десна	лева	лева	десна	лева	десна	лева	десна	десна	десна	лева	обе	обе	обе

а) Поређај податке у табели.
б) Која је рука доминантна?
в) Да ли можеш да донесеш и друге закључке?

Пример 4

У одељењу Агнесе, њени школски другови су разговарали о томе ко може да рони и колико дуго може да задржи дах под водом. Агнеса је одлучила да запише податке о томе колико дуго другови могу да задрже дах:
11, 17, 21, 35, 24, 14, 18, 22, 33, 42, 23, 19, 14, 24, 17, 12, 13, 18, 19, 22, 21, 24, 14, 17

Одговори на следећа питања:
а) Колико ученика је успело да задржи дах дуже од 30 секунди?
б) Колико ученика је успело да задржи дах дуже од 20, а највише 40 секунди?
в) Колико је најдуже време за које један ученик може да задржи дах?

Добијени подаци имају мали број поновљених вредности, односно без сређивања табела ће садржати много редова или колона, тако да није много корисна.
Зато је овде боље да се подаци **групишу**, односно да се направи **табела фреквенција са груписаним подацима.**
Притом је важно да појединачне групе не садрже вредности које припадају двема суседним групама, односно, две узастопне групе не могу бити:
10-20 и 20-30 секунди (податак са величином 20 s сме да припада само једној таквој групи).
Значи, групе морају бити дисјунктне и треба да имају једнаке дужине.

број секунди	фреквенција
11-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Из добијене табеле фреквенција са груписаним подацима, можемо видети колико ђака може да задржи дах дуже од 30 секунди.
То су ученици из последње две групе вредности, односно 2 + 1 = 3 ђака.
Више од 20, а највише 40 секунди издржава 10 ђака, а само 1 ђак може да издржи више од 40 секунди.

Приликом израде табеле груписаних података, треба обратити пажњу на следеће:
- интервали (групе) треба да буду исте дужине,
- не сме бити „преклапања" интервала,
- не сме бити „празнина" између интервала.

Задатак 3

Мерита истражује број махуна на биљкама у свом стакленику. Припремила је табелу за бележење:

број махуна	цртице	фреквенција
15-20		
20-30		
35-40		
40-50		

Пронађи две неправилности у табели, прецртај табелу и исправи неправилности.

Задатак 4

Резултати добијени на тесту из математике за 50 ђака из два осма одељења су следећи:
35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 52, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.
Представи податке у табели фреквенција са груписаним подацима.

Задатак 5

Одређени број ученика из једне школе је анкетиран о удаљености између њиховог дома и школе и добијени су следећи резултати:

удаљеност (у km)	знак	број ученика
$0 < s \leq 1$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$1 < s \leq 2$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	
$2 < s \leq 3$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$3 < s \leq 4$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	
$4 < s \leq 5$	𝍸 𝍸 II	

Допуни табелу, а затим одговори на питања:

а) Да ли можеш ли из табеле да утврдиш која је најкраћа удаљеност коју ученик пређе од куће до школе? Објасни свој одговор.

б) У ком интервалу удаљености се налази највећи број ученика?

в) Колико ученика живи на удаљености од 3 km или краће?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Фолклорна група бележи учешће својих чланова. При томе прикупља податке о:

а) времену чланства у групи,

б) броју проба које посећују недељно,

в) броју кореографија на којима су радили,

г) висини сваког члана фолклорне групе,

д) маси сваког члана фолклорне групе,

ђ) узраста сваког члана.

Одреди које од тврдњи представљају примере дискретних података и објасни свој одговор.

2. Дат је број дана боравка у хотелу за 40 гостију:
1, 4, 14, 13, 15, 2, 7, 7, 12, 10, 17, 16, 10, 8, 9, 1, 3, 5, 6, 12, 16, 16, 4, 9, 7, 5, 12, 11, 9, 8, 2, 1, 12, 15, 3, 4, 8, 12, 4, 15.

а) Колика је популација и које су њене карактеристике?

б) Да ли су прикупљени подаци дискретни или не?

в) Пронађи неправилности у табели фреквенција, препиши је у своју свеску, исправи је и допуни.

број дана боравка	фреквенција
1-3	
4-7	
9-12	
12-14	
15-17	

3. Због неопходног укоричавања и обнављања старих књига, у школској библиотеци је измерена дебљина неколико књига у центиметрима. Добијене вредности су:

2,4	3,2	0,3	0,8	1,1	1,4	2,3	2,9	0,4	1
1,2	2,6	2,5	2,1	0,9	1,4	1,1	2	2,2	3

а) Да ли су добијени подаци дискретни? Објасни!

б) Представи добијене податке табелом фреквенција. Која је карактеристика коју записујеш у табелу?

4. Славе мери времена (t у минутима) која су потребна неким његовим друговима да стигну од куће до градског базена. Андреј броји колико дужина (n) сваки од његових другова преплива дневно.

Подаци које је прикупио Славе

24, 18, 25, 6, 31, 20, 17, 29, 37, 7, 23, 46, 30, 33, 19, 41, 15, 45, 21, 32

Подаци које је прикупио Андреј:

0, 1, 5, 6, 3, 2, 1, 2, 0, 4, 2, 4, 3, 0, 1, 4, 5, 7, 4, 3

а) Који од њих је прикупио дискретне податке? Објасни свој одговор.

б) Запиши времена која је забележио Славе у табелу фреквенције попут дате, коју ћеш преписати у своју свеску.

време, t (минути)	знак	фреквенција
$0 < t \leq 10$		
$11 < t \leq 20$		
$20 < t \leq 30$		
$30 < t \leq 40$		
$40 < t \leq 50$		

в) Запиши податке које је Андреј прикупио у табелу попут дате, коју ћеш преписати у своју свеску.

препливане дужине, n	знак	фреквенција
0-2		
3-5		
6-8		

г) Упореди табеле под б) и в) и наведи неколико разлика међу њима.

5. Висине ученика у разреду, изражене у cm, су следеће:
149, 148, 152, 146, 152, 152, 146, 148, 149, 151, 152, 146, 146, 149, 153, 146, 153, 148, 151, 152, 151, 152, 152, 152, 148, 152, 148, 152, 146, 149.

а) Прикажи их у табели фреквенција.

б) Која је највиша висина ученика у разреду? Да ли има више од једног ученика са том висином?

в) Којих ученика је више, са најмањом или са највећом висином у разреду?

г) Да ли има ученика чија је висина мања од 144 cm?

ђ) Колико ученика има висину већу од 145 cm и мању од 156 cm?

6. За сваки дан у протеклом месецу, пронађи број другова из одељења који су били одсутни из школе.

а) Направи табелу фреквенција са груписаним подацима.

б) Колико је ученика било одсутно дуже од 3 дана у току месеца?

в) Да ли има ученика који уопште нису били одсутни?

г) Колико ученика је одсуствовало тачно 7 дана?

Истраживање

Истражи да ли постоји веза између телесне масе и навика у исхрани међу ученицима у твом одељењу. Прикупи податке о:

а) висини и телесној тежини (да би израчунао/ла индекс телесне масе),
б) број оброка током дана и
в) да ли су оброци претежно здрави или нездрави,
г) направи табеле фреквенција са груписаним подацима,
д) покушај да протумачиш резултате како би открио/ла, да ли исхрана утиче на индекс телесне масе.

3. ПЛАНИРАЊЕ ИСТРАЖИВАЊА И ПРИКУПЉАЊЕ ПОДАТАКА

Активност

За неколико месеци од сада имаш резервисану карту за путовање у место у које никада ниси био.
а) Како ћеш се припремити за путовање у погледу одеће, обуће, хране итд.?
б) Које податке ћеш прикупити пре него што кренеш?
в) Како ћеш испланирати путовање?

Да бисмо добили информације о неким другим стањима и појавама, потребно је да прикупимо и анализирамо податке који представљају та стања и појаве. За успешну анализу података важно је да прво испланирамо који су нам подаци потребни и како ћемо их прикупљати, а то треба да урадимо у складу са постављеним захтевима и условима задатка.
Истраживање у којем вршимо сакупљање, сређивање, представљање (приказивање), анализу података назива се **статистичко истраживање.**
Да би статистичко истраживање, приликом решавања одређеног проблема, било успешно, потребно је направити добар план за његово спровођење, најчешће кроз следеће кораке:

1) Идентификација проблема који истражујемо, заједно са питањима на која истраживање треба да пружи одговоре.
2) Прикупљање и сређивање података.
3) Представљање података.
4) Анализа података и доношење одговарајућих закључака.

1) Идентификовање проблема који истражујемо, заједно са питањима на која истраживање треба да пружи одговоре

Пример 1

Јована би хтела да истражи који је рукометни тим постигао највише голова на Светском првенству. Како да Јована започне своје истраживање?

Да би сазнала податке који су јој потребни, Јована може да присуствује свим утакмицама и забележи резултате, а затим их обрађује. Али то није увек могуће. Наиме, неке утакмице се одржавају у исто време, и она мора да успе да набави карту за сваку утакмицу. Из истог разлога, не може да прати све утакмице на телевизији. Најбољи избор за прикупљање података био би праћење резултата свих утакмица на званичном сајту првенства.

2) Прикупљање и сређивање података

Прикупљање података може бити из различитих извора података.

- **Примарни подаци** су подаци које смо сами директно добили користећи неки од начина - медода прикупљања података.
- Али наши скупови података могу садржати и податке које су претходно прикупили други истраживачи, односно које је претходно прикупио неко други. Такве податке називамо **секундарним подацима.**

Пример 2

Мустафа жели да отвори посао - бизнис у свом малом насељу. Да би одлучио која врста посла ће бити најпотребнија и најдоходовнија, потребни су му подаци о узрасту и интересовањима локалног становништва. Мустафа треба да одлучи да ли ће прикупљати примарне податке или секундарне податке. Које су предности а који недостаци у сваком од начина прикупљања података које Мустафа може да примени?

Сваки приступ има своје предности и недостатке.

1) Прикупљање примарних података (директним постављањем питања становницима)

Предности:
- подаци су свежи и актуелни,
- Мустафа добија тачне информације посебно за његово мало насеље,
- може поставити додатна питања ако нешто није јасно,
- добијени подаци су прилагођени циљу – пословном плану.

Недостаци:
- одузима се време да би се анкетирало довољан број људи,
- потребно је више труда и организације (израда упитника, обрада података),
- неки људи можда неће хтети да одговоре,
- може доћи до грешака приликом прикупљања и уноса података.

2) Прикупљање секундарних података (интернет, статистички завод, претходна истраживања, публикације)

Предности:
- подаци су брзо доступни,
- нема потребе за анкетама и директним контактом са људима,
- нижи трошкови и мање труда за прикупљање података,
- могу се користити подаци из професионалних истраживања.

Недостаци:
- подаци можда нису само за његово мало насеље, већ шире,
- могу бити стари или застарели,
- нису прилагођени његовој конкретној идеји за бизнис,
- могу недостајати управо оне информације које су му потребне (на пример: интересовања, навике).

Ако Мустафа жели прецизнији пословни план, најбоље је да комбинује примарне и секундарне податке – прво да погледа статистику, а затим да направи кратку анкету у свом малом насељу.

Задатак 1

Који подаци би се користили (примарни или секундарни) за истраживање:
а) оцена из историје у твом одељењу,
б) навика рециклаже у твом месту живљења,
в) навика рециклаже у земљи,
г) временских услова.
Објасни свој одговор.

Прикупљање података за дати проблем који се истражује можемо да направимо на неколико начина: посматрањем, мерењем, упитником, поређењем, бројањем и другим начинима.
Да би се олакшао процес прикупљања података и њихове обраде, потребно је припремити најбоље могуће **инструменте** за прикупљање података.
Инструменти треба да буду једноставни и практични за коришћење и да пружају све потребне информације. Неки од најчешће коришћених инструмената су: **посматрање, анкета, интервју, контролна листа, контролна листа са скалом за процену, упитник за:** чињенице, ставове, мишљења или интересовања итд.
Када прикупимо податке, групишемо их, односно сређујемо их у одговарајуће категорије.

Пример 3

Ученици осмог разреда основне школе треба да прикупе податке оудаљености од својих домова до школе и начину на који долазе до школе.
Зато су припремили упитник у којем ће сваки ученик одговорити на неколико питања.
Питања се могу постављати избором, сабирањем, заокруживањем и другим методам.

Често пута се избор може извршити уношењем знака ☑ или знака ☒.

УПИТНИК

Име и презиме ученика:

_____

Разред: 1. VII а 2. VII б 3. VII в

Изабери одговор заокруживањем слова или броја испред одговарајућег одговора.

1. Удаљеност од моје куће до школе је приближно:

1. 100 m 2. 200 m 3. 300 m 4. 400 m 5. 500 m
6. 600 m 7. 700 m 8. 800 m 9. 900 m 10. 1km
11. Између 1 km и 2 km 12. Више од 2 km

2. До школе долазим:

1. Пешице 2. Бициклом 3. Колима
4. Аутобусом 5. Тротинетом тротинет

Упитници треба да испуњавају неколико услова како бисмо били сигурни да ће дати праву слику о проблему који се истражује. Питања не смеју бити сугестивна, увредљива, дугачка или неразумљива, а најбоље је да буду тестирана пре употребе.

Задатак 2

Влатко жели да истражи колико од ученика у његовој школи свира један или више музичких инструмената и који су то инструменти.
а) Које инструменте за прикупљање података Влатко може да користи?
б) Да ли су прикупљени подаци примарни или секундарни?

Пример 4

Илија жели да открије колико времена ученици у његовом разреду проводе гледајући телевизију. Он размишља о два могућа питања за прикупљање података:
1) Колико гледаш ТВ?
2) Колико сати проводиш гледајући телевизију?
Пронађи по једну примедбу за свако од питања и напиши боље питање које би Илија могао да користи.

У питању 1) није јасно каква врста одговора се тражи, па добијени одговори могу бити „много“ или „не много“, што не даје јасну представу о проблему који се истражује.

И питање 1) и питање 2) немају одређени временски период на који се односе, па неко од испитаника може одговорити 3 сата у једном дану, а други 3 сата у 1 месецу, што опет не даје јасну представу о питању које се истражује.

Најбоље је поставити питање са неколико понуђених опција за могући одговор и укључити временски период на који се односи, на пример:

Колико сати си гледао/ла ТВ у току јучерашњег дана?

- уопше не
- мање од 1 сата
- од 1 до 2 сата
- више од 2 сата

У овом случају, треба водити рачуна да поља за одговоре садрже изјаве које немају празнине или преклапања и да укључују цео спектар одговора.

Задатак 3

Лара је саставила инструмент за прикупљање података како би истражила колико често људи користе јавни превоз. Наведи неке негативне аспекте овог упитника и предложи нови и побољшани инструмент за прикупљање података.

УПИТНИК

Име и презиме:

_____

Колико често користиш јавни превоз?

- никад
- понекад
- често
- увек

Пример 5

Менаџер маркета истражује по колико се паковања житарица дневно продају од три различита произвођача. Како може прикупити податке?

У овом случају, подаци се прикупљају **посматрањем** и **бројањем**. Добијене информације могу се приказати у табели или графички, што ће касније бити коришћено за анализу и доношење одговарајућих закључака.

3) Представљање података

Резултати сређивања података, изражени у бројевима, прегледно приказујемо у табели, која је најчешће састављена од правоугаоних поља, добијених укрштањем хоризонталних и вертикалних линија. Овај начин представљања може бити непрегледан. Поред израде табеле, други начин представљања података је графички, који користимо за сликовито представљање сређених података.

Пример 6

Потребно је да истражимо производњу пољопривредних производа (парадајза и купуса) на фарми са четири засебне парцеле. Две од парцела су обичне, две са пластеницима. На који начин може да се истражи следеће:

а) По колико килограма парадајза и купуса се производи дневно са сваке појединачне парцеле?

б) Да ли постоји зависност добијене количине сваког производа од тога да ли је парцела обична или са пластеницима?

в) Зависност добијене количине производа од засађене сорте производа.

а) Да би се одговорило на питање, потребно је током дужег периода свакодневно прикупљати податке о добијеној количини производа са сваке парцеле, мерењем. Затим, податке треба средити и груписати у зависности од врсте парцеле и сорте производа.

У односу на сређивање података, најпрегледније је да се среде у табеле. На пример, табела за произведену количину у односу на парцелу:

	парцела 1 обична	парцела 2 обична	парцела 3 пластеници	парцела 4 пластеници
парадајз	200 kg	250 kg	300 kg	400 kg
купус	250 kg	400 kg	450 kg	600 kg

б) За сваки од посматраних пољопривредних производа, могу се издвојити дневне количине добијене са различитих парцела како би се одговорило на питање да ли постоји зависност производње од врсте парцеле.

в) На крају, анализом прикупљених, а затим и сређених података у вези са сортом производа и добијеном количином, могу се извући одговарајући одговори на постављено питање.

4) Анализа података и извођење одговарајућих закључака

У овом кораку анализирамо податке из табеларног и графичког приказа, дајемо одговоре на постављена питања и извлачимо одговарајуће закључке.
Графички (сликовни) приказ података често помаже при њиховој анализи.
О анализи података говорићемо касније.

Пример 7

Потребно је да спроведеш мало истраживање о навикама ученика у твом одељењу у вези са употребом телефона, таблета и рачунара. Запиши и објасни све кораке плана истраживања.

Сви кораци плана спровођења и страживања дати су редом:

1) План истраживања треба да садржи одговоре на следећа питања:
   - Шта желиш да сазнаш? (истраживачко питање: Колико времена ученици у мом одељењу користе дигиталне уређаје у току једног дана?)
   - Које ученике ћеш укључити? (колико људи, из ког одељења, са ког места)
   - Које податке ћеш прикупљати? (нпр. време коришћења, за шта користе уређаје,...)
   - Колико ће трајати истраживање?

2) Свакако да је од великог значаја избор одговарајућег инструмента за прикупљање података, који може бити анкета (путем припремљеног упитника), табела за дневно бележење или интервју са неколико ученика. Ево неколико примера питања која се могу ставити у упитник:

- Колико сати дневно у просеку користиш дигиталне уређаје:
  а) мање од 2 сата, б) од 2 до 4 сата, в) више од 4 сата?
- За шта их најчешће користиш? (учење, игре, друштвене мреже...)
- Када најчешће користиш своје уређаје:
  а) пре школе, б) за време школских одмора,
  в) одмах после школе, г) касно увече пре спавања?

На овај начин би прикупио примарне податке. Уколико у току твог истраживања користиш секундарне податке, тада можеш потражити статистику на интернету: колико времена у просеку, тинејџери користе дигиталне уређаје у Македонији или у свету?

3) Када се подаци прикупе, ради веће прегледности могу се организовати у табеле и/или представити графички.

4) Анализа добијених података може бити у облику кратког текста са закључцима у вези са питањима као што су следећа: Шта сам открио/ла? Шта значе резултати?

Задатак 4

Направи план за прикупљање података о томе колико свог слободног времена ученици у твом разреду проводе бавећи се спортом. Које су предности а који су недостаци коришћења интервјуа или упитника за прикупљање потребних података?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Лирим прикупља информације о средствима (новцу) који ученици у његовом одељењу свакодневно троше. Направи инструмент помоћу којег Лирим може да прикупи податке. Да ли су прикупљени подаци примарни или секундарни?
2. Благоје хоће да истражи колико воћа и поврћа ученици у његовој школи користе у исхрани. Које инструменте за прикупљање података може да користи? Која питања треба да постави? Састави одговарајући упитник. Да ли имаш идеју како Благоје може да представи податке?
3. Направи план за прикупљање података о броју прочитаних књига у току распуста међу ученицима у твом разреду. Које инструменте за прикупљање података ћеш користити? Да ли су прикупљени подаци примарни или секундарни?
4. Направи план за прикупљање података о максималним и минималним дневним температурама у току протеклог месеца.
5. Направи план за прикупљање података о успешности репрезентативних голмана у Европској рукометној лиги.

Истражување

Направи план истраживања и прикупи податке о томе колико су ученици осмог разреда у ТВОЈОЈ школи физички активни свакодневно.

4. ДИЈАГРАМИ

Активност

На дијаграму на *цртежу* 1 приказани су резултати теста из математике у VIII-б одељењу.

а) Колико је ученика добило оцену 5?

б) Колико је ученика добило оцену 1 или 2?

в) Коју оцену је добила већина ученика?



цртеж 1

Ако желимо да лако и брзо извучемо закључке из прикупљених података, потребно је да их представимо на јасан и једноставан начин. То ћемо постићи графичким приказом помоћу дијаграма.

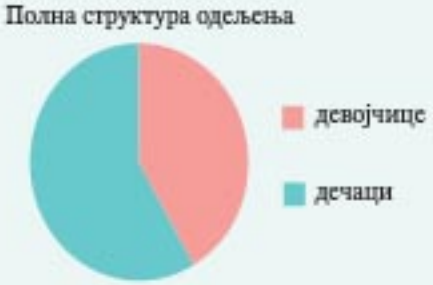
Скенирај код и прегледај дијаграме.

Пример 1

У једном одељењу има 36 ученика, од којих је 15 девојчица. Прикажи полну структуру одељења секторским дијаграмом.

Постоје две могућности за обележје пола - мушки и женски, тако да ће дијаграм имати две категорије: дечаци и девојчице.
Број дечака је $36 - 15 = 21$ дечак (*цртеж* 2).
Према томе, кружни дијаграм ће бити подељен на два дела (сектора).
Да би се одредила величина сваког од делова, прво треба одредити угао дела пуног угла који представља једног ученика.
Тај угао је $360° : 36 = 10°$, тако да ће делови на секторском дијаграму покривати следеће углове:
- за девојчице $10° \cdot 15 = 150°$
- за дечаке $10° \cdot 21 = 210°$

Кружни дијаграм ће бити:



цртеж 2

Други начин:

Подела сектора понекад се може лакша и лакше извршити и уз помоћ делова изражених у разломцима, тако да:

- девојчице представљају $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ круга, а у степенима је $\frac{5\cdot 360^\circ}{12}=150^\circ$.
- дечаци представљају $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$ круга, што је $\frac{7\cdot 360^\circ}{12}=210^\circ$.

Исти дијаграм ће се добити уколико круг поделимо на 12 једнаких делова и одговарајућих седам делова означимо за дечаке и пет делова за девојчице.

Скенирај код и прегледај дијаграме.

Задатак 1

Расподела Петрових укупних паричних средстава за месец март је приказана у табели.

а) Прецртај табелу у своју свеску и допуни је.

б) Нацртај секторски дијаграм на основу података из ње. Запиши сваки од делова секторског дијаграма и у облику разломака, као делове круга.

	денара	%	угао
закупнина	1800		
храна	6000		
превоз	950		
остало	1000		
уштеда	250		

Задатак 2

На секторском дијаграму, на *цртежу* 3, приказана је расподела средстава општинског шаховског удружења за организацију и спровођење шаховског турнира.

Ако је укупан буџет који је удружење имало на располагању износио 60000 динара, израчунај колико средстава припада свакој категорији трошкова.



цртеж 3

Пример 2

При једном истраживању о интересовању за одређене жанрове филмова испитано је 90 одраслих особа и 120 деце. На *цртежу* 4 дати су секторски дијаграми добијени након сређивања података.



цртеж 4

а) Колики проценат деце воли да гледа комедије?

б) Колико одраслих воли филмове са историјском садржином?

в) Колико више деце него одраслих преферира научну фантастику?

г) Сектор за авантуристичке филмове је исте величине код одраслих и код деце. Објасни како ћеш без рачунања знати да више деце него одраслих преферира авантуристичке филмове?

а) Сектор деце која воле комедију има централни угао 45°, а за целокупан узорак одговара пуном углу 360°, од чега за процентуално учешће добијамо $\frac{45}{360} = 0{,}125 = 12{,}5\%$. Дакле, 12,5% деце воли комедију.

б) Пошто узорак одраслих испитаника броји 90 особа, централни угао који одговара 1 одраслој особи износи 360° : 90 = 4°, према томе угао од 120° који одговарара на део узорка одраслих који највише воле филмове са историјском садржином одговара на 30 особа (120° : 4° = 30 особа).

в) Одрасли који воле да гледају филмове научне фантастике су 24° : 4° = 6. Сада ћемо прво одредити централни угао за 1 дете, 360° : 120 = 3°, од чега број деце која воле научну фантастику износи 120° : 3° = 40. Тада је 40 − 6 = 34, односно 34 деце више него одрасли воле научну фантастику.

г) Сектор за авантуристичке филмове има исту величину код одраслих и код деце, али узорак деце је већи у поређењу са узорком одраслих, пун угао од 360° у првом случају код одраслих представља мањи број (90 одраслих), док исти угао од 360° одговара већем броју деце – 120. Према томе, једнаки углови за авантуристичке филмове (36°) одговарају већем броју деце него одраслих.

Задатак 3

Табеле приказују старосну структуру становника два града. Нацртај секторски дијаграм за сваки град и упореди старосне структуре два града. Одговори на следећа питања::

град X	%
0-14	28
15-24	21
25-54	38
55-64	7
65 и више	6

град Y	%
0-14	14
15-24	12
25-54	43
55-64	12
65 и више	19

Скенирај код и разгледај задатке.

а) Колико лица има од 25 до 54 године у граду X?
б) Колики проценат становништва у граду Y је старији од 55 година?
в) Ако град X има 30.000 становника, а град Y има 60.000 становника, како ћеш без рачунања знати које старосне групе у оба града имају исту заступљеност?

Пример 3

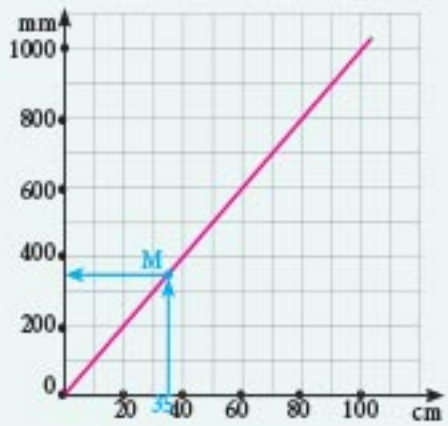
У табели је дата зависност између мера за дужину: центиметри и милиметри.

cm	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
mm	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

а) Прикажи зависност између мера за дужину - центиметара и милиметара помоћу линијског дијаграма.
б) Са линијског дијаграма прочитај колико је милиметара 35 cm.
в) Са линијског дијаграма прочитај број милиметара у центиметрима за следеће вредности: 200, 320 и 470.

а) Да би се графички приказали подаци на координатном систему, на *x*-оси се наносе центиметри, а на *y*-оси милиметри (*цртеж* 5).
б) Да би се прочитала са линијског дијаграма димензија од 35 cm у mm, на *x*-оси се наноси 35 cm и из те тачке се подиже нормала. Преко пресечне тачке *M* нормале и линијског дијаграма повлачи се права, паралелна са *x*-осом, која у пресеку са *y*-осом даје тачку која одговара 35 cm у mm.
в) Слично као под б), али сада полазећи од вредности дате у mm на *y*-оси из линеарног дијаграма може да се прочита да на 200 (у mm) одговара 20 (у cm).

Зависност између јединица за дужину – центиметара и милиметара



цртеж 5

Из *цртежа* 5 можеш уочити да између вредности дужине изражене у центиметрима и изражене у милиметрима постоји директно пропорционална зависност и она може да се запише као $y = 10x$, где је y вредност дужине изражена у милиметрима, а x је вредност дужине изражена у центиметрима.

Скенирај код и разгледај дијаграме.

Задатак 4

На дијаграму на *цртежу* 6 дата је количина падавина у Ресену и Радовишу изражена у милиметрима по метру квадратном у одређеним годинама. Одговори:

а) Када је забележено највише, а када најмање падавина у сваком од градова?
б) Постоје ли године у којима има једнака количина падавина у оба града?
в) У ком периоду је забележен највећи пад падавина током једне године?
г) Колика је разлика у падавинама у 2022. години?



цртеж 6

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Цена пола литра крављег и овчјег киселог млека се мењала током 5 месеци у складу са подацима у табели:

	јануар	фебруар	март	април	мај
кравље кисело млеко	45	47	44	40	40
овчје кисело млеко	57	60	55	51	51

Прикажи ове податке у једном линијском дијаграму. Пази, има два различита типа киселог млека.

2. Табела приказује интересовање за ваннаставне активности код 100 ученика. Нацртај секторски дијаграм да би приказао/ла те податке.

активност	Спорт	Оркестар	Наука	друштвено-хуманитарна
фреквенција	39	18	20	23

3. Са таблицом и секторским дијаграмом на *цртежу* 7 дати су резултати истраживања у вези са омиљеним укусом колача код 30 деце и 36 одраслих.

омиљени укус код деце	фреквенција
воћни	5
чоколада	11
ванила	8
лешник	6



цртеж 7

а) Нацртај секторски дијаграм за податке добијене за децу.
б) Колико одраслих воли чоколадне колаче?
в) Упореди вредности код деце и код одраслих. Да ли постоје сектори у оба кружна дијаграма који имају једнаке централне углове? Колики број јединица они приказују?

4. Ученике из 2 одељења су били упитани како проводе слободно време. Прво одељење има 20, а друго 30 ученика. Одговори су дати помоћу секторских дијаграма на *цртежу* 8:



цртеж 8

а) Пронађи која два сектора имају једнаки угао и објасни како је то могуће, иако је укупан број ученика у обе паралелке различит.

б) У ком одељењу има више ученика који играју игре? Да ли то значи и већи проценат?

в) Израчунај проценат ученика који практикују спорт у оба дијаграма. Шта примећујеш?

г) Направи секторски дијаграм рачунајући да си анкетирао укупно 40 ученика за исто питање где ће сектор за спорт бити представљен са истим углом као у оба дата секторска дијаграма (144°). Углови за секторске дијаграме који одговарају другим активностима предложи по свом избору.

5. Потренбо је да се помоћу линијског дијаграма прикажу подаци о највишој и најнижој просечној месечној температури у једном граду, дате у табели.

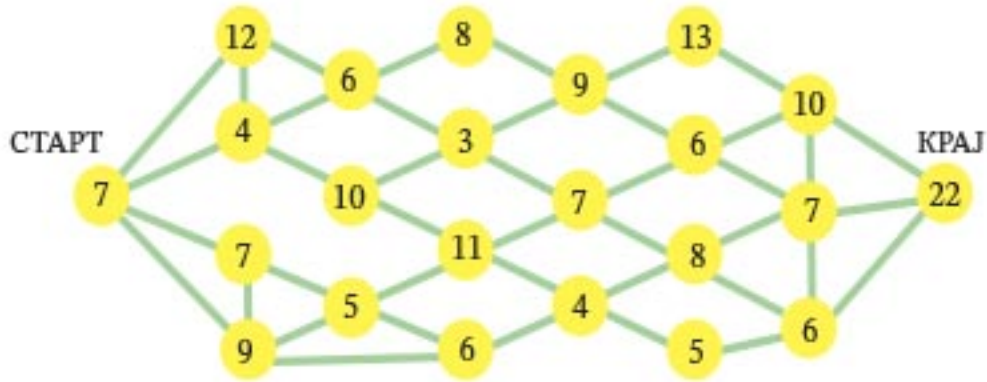
месец	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XII	XII
највиша просечна температура (°C)	+4	+16	+16	+25	+27	+30	+35	+36	+25	+20	+17	+10
најнижа просечна температура (°C)	-25	-20	-2	+3	+5	+13	+18	+11	+12	+5	-4	-15

Истраживање

1. На интернету или у писаним публикацијама тражи приказе података са неким од проучаваних дијаграма и забележи која питања су одговарана конкретним статистичким истраживањима. Затим покушај да саставиш барем још два питања у вези њих.

2. Играј игру са слике према следећим правилима: крећи се линијама почевши од **старта** ка **крају**. Аритметичка средина бројева на којима си стао не сме бити мања од 5 и већа од 10. Не можеш стати више пута на исто поље.

Изазов за одељење: игру можете играти на нивоу одељења или у паровима, победник је онај који ће први стићи до **краја.**



5. СТАБЛО - ЛИСТ ДИЈАГРАМ

Активност

Одреди медијану за следећу групу података:
а) 3, 5, 6, 6, 8, 10, 13, 14, 14, 14
б) 4, 1, 3, 6, 6, 1, 1, 2, 7

Прикупљене податке са нумеричким карактеристикама прикупљене током истраживања можемо организовати сређивањем према величини.
Тада је најприкладније да користимо дијаграм који се назива **дијаграм стабло-лист** (*цртеж* 1)
Притом се, „стабло" налази лево од вертикалне линије, а „листови" десно од ње увек су приказани са само једним бројем.
Листови су организовани по величини, записујемо их у редове и пазимо да буду написани један испод другог (као код вертикалних линија).
Обавезно за сваки стабло-лист дијаграм је додељивање кључа према којем ће се дијаграм читати.

стабло	лист				
2	0	0	1	2	7
3	1	1	2		
4	2	3	5	6	
5	1	3	4	4	6

Кључ: 5/1 представља 51

Пример 1

Дат је скуп вредности које представљају време чекања на каси у супермаркету изражено у минутима.
17, 23, 20, 19, 25, 30, 32, 25, 12, 10, 23, 15, 11.
а) Употреби дијаграм стабло-лист да би приказао/ла резултате.
б) Одреди ранг времена чекања.
в) Колики проценат купаца је чекао 20 минута или више?
г) Пронађи медијану за ову групу података.

а) Први корак: На стаблу ћемо представити десетице, а листови ће бити цифре јединица сваке вредности.

1	7	9	2	0	5	1
2	3	0	5	5	3	
3	0	2				

Други корак: Сређујемо листове по величини.

1	0	1	2	5	7	9
2	0	3	3	5	5	
3	0	2				

Кључ: 3|0 представља 30 минута

б) Ранг = највиша вредност − најнижа вредност = 32 − 10 = 22.

в) Бројимо листове из другог и трећег реда и израчунавамо колики проценат они представљају.

7 купаца је чекало најмање 20 минута, а дато је укупно 13 вредности, па добијамо да је $\frac{7}{13} \approx 0,54 = 54\%$ купаца који су чекали 20 минута и више.

г) Пошто су подаци већ сређени у стабло − лист дијаграму, елиминисањем две вредности (једне са почетка и једне са краја стабло − лист дијаграма) долазимо до вредности која се налази у средини низа, односно 20.

1	~~0~~	~~1~~	~~2~~	5	~~7~~	~~9~~
2	0	~~3~~	~~3~~	5	5	
3	~~0~~	~~2~~				

Скенирај код и прегледај дијаграме.

Задатак 1

Јован је прикупио податке о дужинама гусеница које је нашао на екскурзији.
Дужине су дате на дијаграму стабло - лист.

а) Колика је дужина најмање а колико највеће гусенице?

б) Колико је гусеница Јован пронашао?

в) Колико гусеница је дугачко највише 3 cm?

г) Одреди ранг дужинама.

д) Одреди медијану дужинама.

1	3	5	7	7				
2	0	6	8	8	8	9		
3	1	5	5	5	5	6	8	9
4	1	5						
5	2							

Кључ: 5|2 представља 5,2 cm

Задатак 2

Наставник енглеског језика затражио је од ученика да се представе у неколико речи. Дат је број употребљених речи у представљању 40 ученика.

72	81	78	82	78	89	82	77
85	76	75	81	74	87	84	77
80	83	79	82	75	74	74	71
75	79	72	76	71	75	82	78
76	76	81	77	72	84	87	83

а) Употреби стабло - лист дијаграм да би представио/ла податке.
б) Направи табелу фреквенција са груписаним подацима.
в) Колико је учесника употребили више од 84 речи?
г) Колики је проценат учесника који су користили мање од 75 речи?
д) Пронађи ранг података.
ђ) Одреди медијану групи података.

Задатак 3

Ученици једног одељења су измерили колико минута дневно потроше на вежбање (трчање, брзо ходање или вожња бициклом) у току једног дана. Добијени подаци у минутима су: 32, 45, 28, 41, 39, 47, 52, 36, 44, 33, 38, 50.
а) Направи стабло-лист дијаграм за податке.
б) Које вредности су најчешће?
в) Одреди медијану.
г) Колико ученика је вежбало дуже од 40 минута

Задатак 4

У оквиру часа из биологије ученици једног одељења су мерили пулс у мировању. Добијене вредности су: 72, 78, 65, 81, 74, 69, 77, 83, 71, 75, 68, 79.
а) Представи податке стабло - лист дијаграмом да би боље уочио/ла како физиолошки параметри варирају међу ученицима.
б) Према дијаграму, који је начешћи пулс?
в) Колико је медијана?
г) Колико ученика је пулс 75 или више?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Из датог стабло-лист дијаграма одреди:
   а) најнижу вредност,
   б) највећу вредност,
   в) колико података има вредност већа од 90,
   г) колико података има вредност од најмање 100,
   д) проценат података мањи од 75.

7	3	4	6	7	8	9	9						
8	0	0	1	1	2	3	3	5	5	6	7	8	8
9	1	1	2	4	4	5	8	9					
10	2	3	7										
11													
12	2												

Кључ: 9|1 представља 91

2. Анета броји речи у свакој од 30 реченица у дневним новинама. Њени резултати су приказани стабло-лист дијаграмом.

0	8	8	9					
1	1	2	3	4	4	8	9	
2	0	3	5	5	7	7	8	
3	2	2	3	3	6	6	8	8
4	1	2	3	3	5			

Кључ: 4|1 представља 41 реч

а) Колико реченица има по 36 речи?

б) Одреди ранг.

в) Наћи медијану.

г) Израчунај просечан број речи у реченицама које анализира Анета.

3. Наведена је маса, у килограмима, за 15 пакета.

1,1	1,7	2,0	1,0	1,1	0,5	3,3	2,0
1,5	2,6	3,5	2,1	0,7	1,2	0,6	

а) Нацртај стабло-лист дијаграм да би приказао/ла ове информације.

б) Колико пакета има масу мању од 2 килограма?

в) Какав је ранг маса?

г) Одредити медијану маси паковања.

4. Јана мери висину биљака (у милиметрима) у ботаничкој башти. Ово су добијени резултати:

178	189	147	147	166
167	153	171	164	158
189	166	165	155	152
147	158	148	151	172

а) Прикажи резултате стабло-лист дијаграмом.

б) Који је ранг висина?

в) Колико је биљака виших од 165 mm?

г) Наћи медијану висина.

д) Одреди моду висина.

5. Ученици осмог одељења изводе лабораторијски експеримент да би измерели време пада мале металне лопте са висине од 3 метра.

Сваки ученик изврши по једно мерење и добијени су следећи резултати (у секундама):
0,78; 0,81; 0,74; 0,69; 0,72; 0,85; 0,80; 0,73; 0,77; 0,82; 0,76; 0,79; 0,75; 0,83; 0,71;
0,88; 0,84; 0,70; 0,74; 0,78.

а) Направи стабло - лист дијаграм за податке.

б) Који је ранг времена?

в) Колико је мерења испод 0,75 s?

г) Колика је мода, ако постоји?

6. Један географски клуб прикупља податке о дневним минималним температурама у два различита подручја у РС Македонији у истом периоду јануара.
Они су сортирали податке и за Област А су већ направили стабло - лист дијаграм:

Област А: Стабло - лист дијаграм (минималне температуре у °C)

−5	9
−4	8 7
−3	9 5 2
−2	8 6 6 5
−1	9 4

Кључ -3/5 представља -3,5 °C

Подаци за област Б (у °C): −1,0; -0,5; -2,0; -1,5; -3,0; -2,5; -1.0; -0,5; -0,5; -1.0; -4,2; -2.0.

а) Направи стабло-лист дијаграм за Област Б.

б) Упореди два дијаграма. Шта се може закључити о разлици у клими између обе области?

в) Када би требао/ла да препоручиш, области у којима би боље функционисала воћарска култура осетљива на лед (на пример бресква или кајсија), у ком крају би поставио/ла плантажу? Образложи своју одлуку на основу дијаграма.

г) Предложи два истраживачка питања која би могла објаснити разлике на минималним температурама између области А и Б.

Истраживање

Прикупи податке о висини ученика у твом одељењу, броју бодова на последњем тесту, време трчања у минутима на 400 m и слично за неке школске активности. Представи податке стабло - лист дијаграмом и одреди:

а) ранг, б) медијана, в) мод, д) аритметичку средину.

Запиши предности коришћења стабло-лист дијаграма уместо табеле.

6. СТАТИСТИЧКИ ПРОРАЧУНИ ЗА ГРУПИСАНЕ ПОДАТКЕ

Активност

Температуре мерене сваког дана у подне током две недеље у јануару су следеће – 2, – 5, – 6, – 4, – 1, 2, 4, 5, 5, 3, – 2, – 3, 0, 1, 2.

Наћи:

а) моду,

б) медијану,

в) аритметичку средину,

г) ранг података.

Скенирај код и прегледај статистике.

Ако су дати груписани подаци, не можемо одредити мод, медијану и аритметичку средину. Уместо њих, можемо наћи модалну класу, класу која садржи медијану и хајде да направимо процену просека.

Пример 1

Поени са писменог рада из математике које су ученици једног одељења освојили приказани су следећом табелом фреквенција са груписаним подацима:

поени	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100
број ученика	3	8	13	10	8

а) Одреди класу која садржи медијану.

б) Одреди модалну класу.

в) Колики је просечан број бодова добијених на писменом раду?

а) Сабирамо фреквенције да бисмо добили укупан број ученика $3 + 8 + 13 + 10 + 8 = 42$.
Медијана треба да буде на средини између 21. и 22. вредности.
Првих 11 вредности су од 0 до 49 поена, а наредних 13 вредности припада интервалу 50 до 72 поена.
Према томе 21. и 22. вредност налазе се у интервалу 50-72, односно класи која садржи медијану је 50-72.

б) Модална класа је класа са највећом фреквенцијом, односно 50-72.

в) Класа 0-26 садржи 3 вредности од 0 до 26, њена средња вредност је 13, класа 27-49 има 8 вредности, њена средња вредност је $(27 + 49) : 2 = 38$, итд.

поени	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	укупно
средња вредност класе, m	13	38	61	80	94	
број ученика, фреквенција f	3	8	13	10	8	42
m - f	39	304	793	800	752	2688

Процена за укупан број бодова је 2688, а број ученика који су постигли ове поене је 42.
Процена за просечан број поена по ученику је 2688 : 42 = 64.
У стварности се у статистичким истраживањима најчешће користе софтверска решења за обраду података.
У датом примеру можеш покушати да користиш функције за аутоматско израчунавање неких од вредности у табели, као што је збир (укупан број ученика, слика 1) приликом процене просека.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		поени	0-26	27-49	50-72	73-87	88-100	укупно
3		средња вредност класе, m	13	38	61	80	94	
4		број ученика, фреквенција, f	3	8	13	10	8	=SUM(C4:G4)
5								

слика 1

Пример 2

Лејла је сакупила бодове које је сваки њен друг из разреда освојио/ла у једној игри.
Подаци у бодовима су: 7, 9, 5, 6, 8, 7, 10, 6, 8, 9, 7, 5, 6.
а) Унеси податке у програм за табеларне прорачуне.
б) Направи стабло - лист дијаграм користећи функцију за сортирање.
в) Аутоматски израчунај: укупан број ученика, просечан број бодова, највећи и најнижи резултат.

а) На слици 2 приказан је пример података унетих у софтвер за табеларне прорачуне.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Ученик	Поени			
3		1	7			
4		2	9			
5		3	5			
6		4	6			
7		5	8			
8		6	7			
9		7	10			
10		8	6			
11		9	8			
12		10	9			
13		11	7			
14		12	5			
15		13	6			

слика 2

б)

5	5 5
6	6 6 6
7	7 7 7
8	8 8
9	9 9
10	10

Кључ: 5/5 ученик има 5 поена.

в) Функције за аутоматску обраду:

- Укупно ученика: =COUNTA(C3: C15) → 13
- Просек: =AVERAGE(C3: C15) → 7,23
- Највиши резултат: =MAX (C3: C15) → 10
- Најнижи резултат: =MIN(C3: C15) → 5

Пример 3

Пронађи ранг висине ученика из једног одељења, датих у следећој табели:

висина (cm)	150-154	155-159	160-164	165-169	170-174	175-179
број ученика	5	18	42	14	13	8

Ако су подаци већ груписани у интервале са табелама фреквенција, тада ранг представља разлику горње границе на последњем интервалу са доњом границом првог интервала.

Ранг је 179 - 150 = 29.

Задатак 1

Телесне масе 100 људи су дате у следећој табели.

телесна маса (kg)	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70 -79	80- 89	90 - 99	Вкупно
фреквенција	6	8	22	31	12	11	5	5	100

а) Нађи модалну класу ових маса? Шта показује модална класа?
б) Нађи класу која садржи медијану.
в) Нађи ранг.
г) Прво направи процену просечне масе. Објасни своју стратегију процењивања.
д) Провери своју процену израчунавањем.

Задатак 2

Највећа маса добијена током 50 мерења износи 8,56 kg. Ако је ранг мерења 1,23 kg, која је онда најмања измерена маса?

Задатак 3

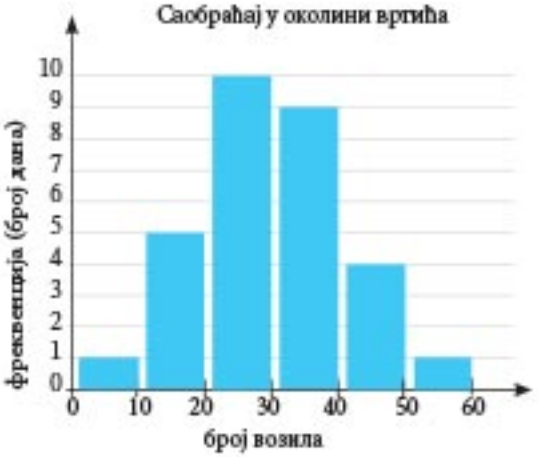
Руководство вртића био је забринут за безбедност у саобраћају у непосредној близини вртића. Направили су истраживање колико возила прође испред вртића од 7:00 до 8:00 сати радним данима у трајању од 6 недеља.

Подаци су дати стубастим дијаграмом (*цртеж* 1)

а) Колико возила се најчешће налази у близини вртића? Шта треба да одредиш да би одговорио/ла на ово питање?

б) Са дијаграма одреди класу која садржи медијану и направи процену просечног броја возила.

в) Безбедност је нарушена ако је број возила већи од 35. Да ли је околина вртића безбедна? Које информације користиш да би одговорио/ла на ово питање?



цртеж 1

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

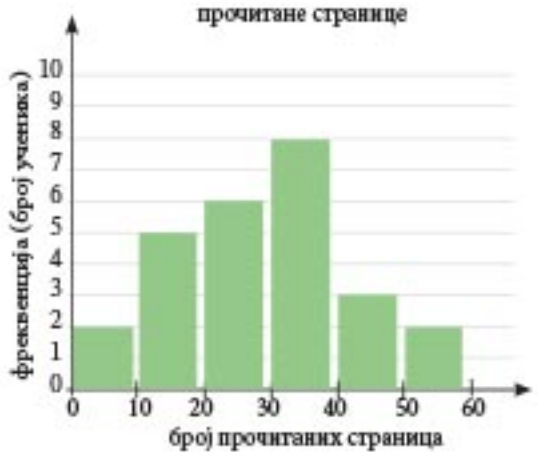
1. Наставница македонског језика је питала своје ученике колико страница од задате лектире су прочитали до сада. Резултати су дати на стубастом дијаграму (*цртеж* 2).

   а) Која је модална класа за податке које је наставница прикупила?

   б) Колико ученика је прочитало најмање 40 страница?

   в) Требало је да ученици за домаћи задатак прочитају најмање првих 30 страница. Колико ученика није завршило свој домаћи задатак?

   г) Пронађи ранг података.



цртеж 2

2. Мини-маркет бележи колико купаца има сваког дана у току 50 дана.

   Резултати су следећи:

81	82	75	83	104	92	112	124	110	92
111	105	78	87	99	86	129	115	121	76
109	75	104	96	74	104	98	114	106	109
101	110	92	86	122	118	115	117	84	71
73	116	119	122	94	81	107	109	115	127

а) Направи табелу фреквенције за груписане податке користећи класе 70-79, 80-89, ..., 120-129. Уколико имаш могучности, направи табелу помоћу софтвера за табеларна израчунавања.

б) Нађи модалну класу.

в) Нађи класу која садржи медијану.

г) Изрази у процентима колико дана је маркет имао најмање 100 купаца.

д) Запослени у маркету мисле да је дан успешан ако имају најмање 110 купаца.На основу добијених резултата, да ли маркет треба да направи промене за побољшање свог пословања?

3. Истражи колико сати дневно твоји вршњаци користе интернет: за учење, игре, друштвене мреже или гледање видео записа. Прикупи податке од најмање 30 вршњака и групирај их у табелу за фреквенцију користећи одговарајући софтвер за табеларне прорачуне. Затим, покушај да користиш једну од функција софтвера за табеларна израчунавања да би нацртао/ла дијаграм (изабери тип дијаграма за који мислиш да пружа најбољи приказ).

а) Нађи модалну класу.

б) Нађи класу која садржи медијану.

в) Направи роценуа просека.

Напиши кратак закључак (3 до 4 реченице) у којем ћеш:

- анализирати како ученици најчешће користе интернет (на основу модалне класе)
- проценити „типичан" начин коришћења (на основу класе која садржи медијану)
- прокоментарисати да ли је коришћење интернета умерено или прекомерно (на основу процењеног просека)

Напиши препоруке о томе како би ученици могли ефикасније да организују своје време на интернету. Можеш укључити и кратак предлог плана.

4. Висине 50 ученика (у cm) износе:

145	154	161	137	137	130	128	154	139	155
168	138	161	152	160	131	156	130	141	146
162	160	163	139	148	157	149	146	146	142
146	137	127	130	128	158	139	144	140	143
130	134	125	176	128	132	138	137	143	135

а) Среди податке у табелу фреквенциа са груписаним подацима. За дужину групног интервала одлучи сам/а

б) Нађи модалну класу.

в) Нађи класу која садржи медијану.

г) Нађи ранг.

Истраживање

1. Истражи на интернету који су најчешће коришћени софтвери и направи Т-табелу за два од њих.
2. Размисли и одговори зашто је понекад прикладно користити аритметичку средину, а понекад мод или медијану за извођење закључака о некој популацији? Како то зависи од ранга? Предложи примере где општа слика даје медијану, моду или аритметичку средину.

7. ЕЛЕМЕНТАРНИ ДОГАЂАЈ. СУПРОТАН ДОГАЂАЈ. ВЕРОВАТНОЋА

Елементарни догађај

Активност

1. Наведи све могуће исходе експеримента „бацање новчића само једном".

2. За експеримент „бацање коцкице за игру", одреди који је од следећих догађаја сигуран, а који немогућ:

F: На горњој страни коцкице, појавило се од 1 до 6 тачака,

G: На горњој страни коцкице појавило се 7 тачака?

Подсети се да је **експеримент** активност која се може посматрати. Сваки експеримент може да се понови под истим условима, има више могућих исхода и не знамо унапред који ће се догодити. На пример, експеримент може укључивати бацање новчића или коцкице за игру, истраживање да ли биљке расту брже на светлу или у мраку, или чак озбиљне лабораторијске тестове.

Различити резултати (исходи) експеримента називају се догађаји. У експерименту извлачења карте из шпила карата за играње, догађаји су исходи: извучена је осмица треф, извучена је десетка, извучен је картон црвене боје и слично.

Пример 1

Код експеримента „бацање коцкице", размотри следеће догађаје:

A: На горњој страни коцкице, се појавио паран број тачака,

B: На горњој страни коцкице, се појавио паран број тачака дељив са 3,

E_1: На горњој страни коцкице, се појавила 1 тачка,

E_2: На горњој страни коцкице, су се појавиле 2 тачке,

E_3: На горњој страни коцкице, су се појавиле 3 тачке,

E_4: На горњој страни коцкице, су се појавиле 4 тачке,

E_5: На горњој страни коцкице, се појавило 5 тачака,

E_6: На горњој страни коцкице, се појавило 6 тачака,



Који од ових догађаја се могу „разложити" на друге догађаје, а који не?

Догађај A се појављује ако се догоди један од следећих догађаја:

E_2: На горњој страни коцкице, су се појавиле 2 тачке,

E_4: На горњој страни коцкице, су се појавиле 4 тачке,

E_6: На горњој страни коцкице, се појавило 6 тачака,

што значи да овај догађај може да буде „разложен“ на друге догађаје који се даље не могу разложити.

Догађај B се појављује ако се догоди један од догађаја:

E_3: На горњој страни коцкице, су се појавиле 3 тачке,

E_6: На горњој страни коцкице, се појавило 6 тачака,

што значи да се овај догађај може разложити и на друге догађаје који се не могу даље разложити.

За догађаје који се не могу даље разложити на друге догађаје кажемо да су елементарни догађаји. У овом примеру, то су догађаји E_1, E_2,E_3, E_4, E_5, E_6.

Елементарни догађај у односу на дати експеримент је сваки догађај који се не може разложити на друге догађаје.

При једном извођењу експеримента „бацања коцкице“, појављује се један и само један елементарни догађај. То значи да се при појављивању једног од елементарних догађаја, не може догодити ниједан од осталих елементарних догађаја у вези са тим експериментом.

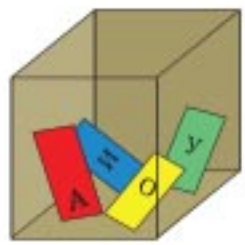
Задатак 1

Запиши све елементарне догађаје у вези са експериментом:

а) бацање новчића само једном,

б) извлачење картице из кутије на слици 1а,

в) окретање вртешке са слике 1б.



слика 1а



слика 1б

Пример 2

Запиши све елементарне догађаје везане за експеримент „бацање два новчића само једном“.

Означимо елементарне догађаје при бацању новчића:

са елементарним догађајем G „глава се појавила на горњој страни новчића“,
са елементарним догађајем P „на горњој страни новчића се појавило писмо“.
Пошто се експеримент састоји од бацања два новчића заједно, ради веће прегледности, елементарне догађаје можемо приказати у табели:
Значи, сви елементарни догађаји у вези са експериментом „бацања два новчића“ могу се написати као: писмо писмо = P P; глава писмо = G P; писмо глава = P G; глава глава = G G.

Пример 3

Запиши све елементарне догађаје при експерименту „окретање обе вртешке само једном“ дате на слици 2.



вртешка 1 вртешка 2

слика 2

Да би исписали све елементарене догађаје у експерименту окретања две вртешке, прво се договарамо да ћемо елементарне догађаје за сваку од вртешки означити на следећи начин:

за вртешку са словима:
А: стрелица се зауставила на пољу са словом А,
Б: стрелица се зауставила на пољу са словом Б,
В: стрелица се зауставила на пољу са словом В.

за вртешку са бројевима:
1: стрелица се зауставила на пољу са бројем 1,
2: стрелица се зауставила на пољу са бројем 2,
3: стрелица се зауставила на пољу са бројем 3,

Сви елементарни догађаји везани за експеримент „вртење две вртешке“ дати су у табели:

		вртешка са бројевима			
		1	2	3	4
вртешка са словима	А	А1	А2	А3	А4
	Б	Б1	Б2	Б3	Б4
	В	В1	В2	В3	В4

На пример, догађај Б3 означава да се стрелица на једној вртешци зауставила на слову Б, а на другој вртешци на броју 3.

Скенирај код и испитај елементарне догађаје експеримента.

Задатак 2

Састави табелу елементарних догађаја повезаних са експериментом:
а) бацање две коцкице,



слика 3

б) бацање два тетраедра са зидовима означеним бројевима
1, 2, 3 и 4 (слика 3).
Упутство: При бацању тетраедра исход се одређује према броју уписаном на страни на којој тетраедар лежи на површини на коју је бачен.
в) бацање коцкице за играње и тетраедра са странама које су означене бројевима 1, 2, 3 и 4.

Супротан догађај. Вероватноћа

Активност

У експерименту бацања новчића, који је супротан догађај од догађаја A: пало је писмо?

Супротан догађај догађају A јесте догађај који се појављује онда и само онда када се догађај A не остварује.

Супротан догађај од догађаја A означен је са $\overline{A}$.

Пример 4

У експерименту „бацање коцкице за играње“ одреди:
а) Који је супротан догађај догађају A: пао је број тачака мањи или једнак са 3?
б) Да ли се увек дешава тачно један од догађаја A или $\overline{A}$?

а) У вези експеримента „бацање коцкице за играње“, дешава се један од елементарних догађаја:
E_1: на горњој страни коцке појавила се 1 тачка,
E_2: на горњој страни коцке појавиле су се 2 тачке,
E_3: на горњој страни коцке појавиле су се 3 тачке,
E_4: на горњој страни коцке појавиле су се 4 тачке,
E_5: на горњој страни коцке појавило се 5 тачака,
E_6: на горњој страни коцке појавило се 6 тачака.
Догађај A: пао се број тачака мањи или једнак на 3, појављује се ако се појави један од елементарних догађаја: E_1, E_2 или E_3.
Супротан догађај $\overline{A}$ се појављује ако се појави један од елементарних догађаја: E_4, E_5 или E_6.
Према томе, супротан догађај догађају A је догађај $\overline{A}$: догоди се број тачака већи од 3.
б) У сваком бацању коцкице, појављује се тачно један од елементарних догађаја E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 или E_6, што значи да се увек појављује тачно један од догађаја A или $\overline{A}$.

Задатак 3

Који је супротан датом догађају у сваком од експеримената:

а) експеримент: бацање коцкице за играње , догађај А: појављује се број тачака већи од 4,

б) експеримент: извлачење куглице из кутије која садржи црне, беле и црвене куглице, догађај Б: извлачи се бела куглица,

в) експеримент: истовремено бацање два новчића, догађај С: на горњој страни обе куглице се појављује писмо,

г) експеримент: бацање коцкице и новчића, догађај D: на коцкици се појављује број тачака дељив са 3, а на горњој страни новчића се појављује глава.

Скенирај код и испитај вероватноће.

Активност

За експеримент „бацај новчић само једном“, израчунај вероватноћу догађаја А: на горњој страни новчића се појављује писмо.

Свакако си израчунао/ла да је вероватноћа догађаја А

$$P(A)=\frac{\text{број успешних исхода}}{\text{број свих исхода}}=\frac{1}{2}$$

Пример 5

Небојша баца коцкице за играње.

а) Колика је вероватноћа догађаја А: да се појави 6 тачака на горњој страни коцкице?

б) Колика је вероватноћа појављивања супротног догађаја догађају А?

а) За вероватноћу догађаја А имамо $P(A)=\frac{1}{6}$ (од свих 6 страна коцкице, само једна има 6 тачака).

б) Супротно од догађаја А је догађај $\overline{A}$: број 6 се није пао. Догађај $\overline{A}$ се дешава увек када се појаве 1, 2, 3, 4 или 5 тачака појаве на горњој страни коцкице, тако да је вероватноћа

$$P(\overline{A})=\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}=1-P(A).$$

Пример 6

Матеа је бацила коцкицу 30 пута и посматрала колико пута ће се шест тачака појавити на горњој страни коцкице. Притом је избројала да се 7 пута на горњој страни коцке појавило шест тачака. Колика је експериментална вероватноћа догађаја „појавило се 6 тачака“ и колика је вероватноћа супротног догађаја (није се појавило 6 тачака на горњој страни коцкице)?

Експериментална вероватноћа за догађај „на горњој страни коцке појавило се 6 тачака“ приликом 30 бацања је $\frac{7}{30}$, док се у тих 30 бацања у експерименту Матеа 23 пута није појавило 6 тачака на горњој страни коцке. Тако је вероватноћа супротног догађаја $\frac{23}{30}=1-\frac{7}{30}$.

Ако је вероватноћа неког догађаја P, онда је вероватноћа његовог супротног догађаја $1-P$.

Пример 7

Искра у својој ташни има две биоскопске и три позоришне карте. Она извлачи једну карту из торбе без гледања.

а) Запиши супротне догађаје везане са извлачењем карата из Искрине ташне.

б) Колика је вероватноћа да ће извући позоришну карту?

в) Колика је вероватноћа да ће извући биоскопску карту?

г) Шта је вероватније да ће бити извучено, биоскопска или позоришна карта?

д) Колика је вероватноћа да ће извући спортску карту из своје ташне?

ђ) Који је супротан догађај догађају C: Искра извлачи спортску карту из своје ташне?

а) Могући догађаји су:

A: Искра извлачи карту за позориште, B: Искра извлачи карту за биоскоп.

Њихови супротни догађаји су:

$\overline{A}$: Искра извлачи карту за биоскоп, $\overline{B}$: Искра извлачи карту за позориште.

б) A: Искра извлачи карту за позориште, па $P(A)=\frac{3}{5}$.

в) B: Искра извлачи карту за биоскоп, па $P(B)=\frac{2}{5}$.

г) Већа је вероватноћа да ће бити извучена карта за позориште, јер је

$P(A)=\frac{3}{5}>\frac{2}{5}=P(B)$.

д) Догађај C: извлачење карте за спортску утакмицу је немогућ догађај, па је $P(C)=0$.

ђ) $\overline{C}$: извлачи карту која није за спортску утакмицу из ташне, односно извлачи карту за позориште или биоскоп, па је $P(\overline{C})=1$.

Задатак 4

Свако слово абецеде је написано на картици, а картице су стављене у кутију. Једна картица се извлачи из кутије без гледања. Колика је вероватноћа избора:

а) картице са словом X,

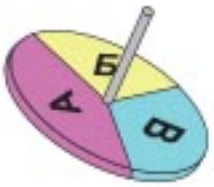
б) картице са једним од слова из речи МАТЕМАТИКА,

в) картице са самогласником.

Који су супротни догађаји од догађаја под а), б) и в)? Колика је њихова вероватноћа?

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши све елементарне догађаје везане за експеримент:
   а) окретање вртешке са три дела на којима су написана слова А, Б, В (слика 4),
   б) извлачење једне картице од пет картица на којима су написани бројеви од 1 до 5 (слика 5).
   в) извлачење једне картице од картица на којима су написани сви садржаоци броја 5 мањи од 30.



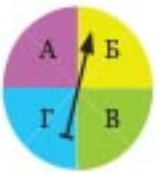
слика 4



слика 5

2. На слици 6 приказане су коцкице и вртешка са означеним словима на сваком од четири обојена поља.





слика 6

   а) Запиши све елементарне догађаје везане за експеримент са окретањем вртешке и бацања коцкице.
   б) Колика је вероватноћа да се на врху коцкице појави паран број тачака, а на вртешци слово В?

3. Без гледања, извуци једну бомбону из тегле са бомбонама као на слици 7.
   а) Запиши експеримент.
   б) Запиши све елементарне догађаје.
   в) Колика је вероватноћа извлачења жуте бомбоне?
   г) Да ли је догађај „извучена је плава или зелена бомбона“ супротан догађај догађају „извучена је жута бомбона“?
   Објасни свој одговор.
   д) Одреди вероватноћу супротног догађаја догађају „извучена је жута бомбона“.
   ђ) Који је супротан догађај догађају „извучена је бомбона која није црвена“?



слика 7

4. Луан баца стрелицу за пикадо у мету као што је приказано на слици 8.
   а) Запиши Луанов експеримент и све елементарне догађаје повезане са тим експериментом. Израчунај вероватноћу догађаја:
   А: погођено је плаво поље.
   Б: погођено је поље које није плаво.
   В: погођено је црвено поље.
   Г: погођено је жуто или зелено поље.



слика 8

б) Запиши супротан догађај сваком од догађаја A, B, C, D.
Израчунај њихову вероватноћу.
в) Запиши супротан догађај догађају „Луан погађа црвено поље“, а затим израчунај његову вероватноћу.

Истраживање

Направи авион од папира. Предвиди колико често ће правилно слетети, користећи положаје приказане на слици за исправна или нетачна слетања.

1) правилно слетање



2) неправилно слетање



Баци авион 50 пута и запиши колико пута је правилно слетео. Затим, процени шансе да авион погрешно слети. Упореди своје резултате са резултатима својих другова из разреда.

8. ДОГАЂАЈИ КОЈИ СЕ МЕЂУСОБНО ИСКЉУЧУЈУ. ЗАВИСНИ И НЕЗАВИСНИ ДОГАЂАЈИ

Догађаји који се међусобно искључују

Активност 1

За експеримент „бацање коцкице за игру“, размотри догађаје:
A: на горњој страни коцкице се појавио паран број тачака, и
B: на горњој страни коцкице су се појавиле три тачке или пет тачака.
Да догађаји A и B могу да се појаве заједно (истовремено)?

За два или више догађаја који не могу истовремено да се појаве кажемо да се **међусобно искључују.**

Пример 1

Одреди два примера међусобно искључивих догађаја у експерименту извлачење карте из кутије са картама са бројевима од 1 до 10.

Један пример међусобно искључивих догађаја у датом експерименту су следећи догађаји:
А: извучена је карта на којој је написан парни број и
Б: извучена је карта на којој је написан непарни број.

Други пример међусобно искључивих догађаја у датом експерименту је:

В: извучена је карта на којој је написан број мањи од 5,
Г: извучена је карта на којој је написан број мањи од 7,
Д: извучена је карта на којој је написан број 6.

Задатак 1

Што се тиче експеримента „бацање коцкице за игру“, израчунајте вероватноћу датих догађаја и утврдите да ли су међусобно искључиви:
а) А: паран број тачака појавио се на горњој страни коцкице и
   В: 3 тачке појавиле су се на горњој страни коцкице.
б) С: број тачака дељив са 3 појавио се на горњој страни коцкице и
   D: прост број тачака појавио се на горњој страни коцкице.
в) Е: број тачака дељив са 2 појавио се на горњој страни коцкице и F: непаран број тачака појавио се на горњој страни коцкице.

Пример 2

Куглица се извлачи из кутије која садржи 5 црвених куглица, 2 жуте куглице и 4 беле куглице.
а) Да ли су догађаји:
   A_1: извлачи се црвена куглица и
   A_2: извлачи се бела куглица,
   међусобно искључиви?
б) Да ли се догађај А: извлачи се црвена или бела куглица, дешава сваки пут када се догодиједан од догађаја A_1 или A_2?
в) Израчунај вероватноћу догађаја А.

а) Догађаји A_1 и A_2 се међусобно искључују, јер се не могу догодити истовремено. У ствари, црвена и бела куглица не могу бити извучене у исто време.
б) Догађај А се дешава кад год се догоди један од догађаја A_1 или A_2.
в) Вероватноћа догађаја А је збир вероватноћа догађаја A_1 и A_2:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = \frac{9}{11}.$$

Пример 3

Зелена и црвена коцкица се бацају истовремено, а бројеви тачака које се појављују на горњим странама се сабирају. Израчунати вероватноћу догађаја

A: збир тачака које се појављују на горњим странама обе коцкице је мањи од 4.

Размотри табелу која се односи на експеримент „бацање црвене и зелене коцкице истовремено".

		зелена					
		1	2	3	4	5	6
црвена	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Догађај A ће се десити кад год се догоди један од следећих догађаја:

A_1 : на зеленој коцкици се појављује 1 тачка, а на црвеној коцкици се појављује 1 тачка,

A_2 : на зеленој коцкици се појављује 1 тачка, а на црвеној коцкици се појављују 2 тачке,

A_3 : на зеленој коцкици се појављују 2 тачке, а на црвеној коцкици се појављује 1 тачка,

Догађаји A_1, A_2 и A_3 се међусобно искључују. Вероватноћа догађаја A је збир вероватноћа A_1, A_2 и A_3:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Задатак 2

Из фиоке која садржи 4 црвене чарапе, 3 плаве чарапе и 6 белих чарапа, једна чарапа се извлачи без гледања.

а) Да ли су догађаји:

A_1: извучена је црвена чарапа и

A_2: извучена је плава чарапа,

међусобно искључиви?

б) Да ли се догађај A: извучена је црвена или плава чарапа, дешава сваки пут када се деси један од догађаја A_1 или A_2?

в) Израчунај вероватноћу догађаја A_1, A_2 и A.

г) Да ли је вероватноћа догађаја A једнака збиру вероватноћа догађаја A_1 и A_2?

Задатак 3

Две вртешке се окрећу истовремено као на слици 1.

Наћи вероватноћу догађаја

A: „збир бројева на којима се заустављају стрелице две вртешке је мањи од 5."



вртешка 1 вртешка 2

слика 1

Независни и зависни догађаји

Активност 2

У вези са експериментом бацања два новчића, анализирај како појављивање главе на једном новчићу утиче на појављивање главе или писма на другом новчићу.

Два догађаја су **независна** ако појављивање једног догађаја не утиче на појављивање другог догађаја.

Пример 4

Ана пече колачиће. У исто време, њен брат Марко игра фудбал у дворишту.
Објасни зашто су следећи догађаји независни:

А: Ана успева да испече колачиће, и

Б: Марко постиже гол док игра.

Ова два догађаја су независна, зато што Анин успех у печењу колачића не утиче на то да ли ће Марко постићи гол, нити Марков резултат у игри утиче на резултат печења Аниних колачића.

Пример 5

Тони и Сара играју игру са две коцкице. Тони баца црвену коцкицу, а Сара баца плаву коцкицу. Утврдите да ли су следећи догађаји независни:

А: црвена коцкица показује број тачака већи од 4 и

Б: плава коцкица показује паран број тачака.

Објасни свој одговор.

Ова два догађаја су независна јер исход црвене коцкице не утиче на исход плаве коцкице.

Задатак 4

Петар купује млеко у продавници. У исто време, његова сестра Елена кући гледа филм.
Да ли су догађаји независни:

А: Да Петар купи млеко, и В: Да Елена изгледа филм до краја?

Објасни свој одговор.

Задатак 5

У кутији има 5 црвених и 6 зелених куглица. Мериам извлачи једну куглицу, враћа је у кутију, а затимпоново извлачи куглицу.
Напиши два независна догађаја, а затим објасни зашто су независни.
Два догађаја која нису независна називају се **зависни догађаји.**

Према дефиницији независних догађаја, два догађаја су зависна ако појављивање једног догађаја утиче на појављивање другог догађаја.

Пример 6

У кухињи се налази посуда са 5 бомбона, од којих су 3 воћне, а 2 чоколадне. Ана вади један бомбон и поједе га, а одмах затим из исте посуде вади други. Да ли су ови догађаји независни:

А: Ана вади воћни бомбон при свом првом избору и

Б: Ана вади воћни бомбон при свом другом избору (након што је појела први).

Објасни свој одговор.

Ова два догађаја су зависна, јер догађај А директно мења стање бомбона у посуди и утиче на догађај В.

Ако Ана прво извади воћни бомбон (ако се догађај А догоди), остаје мање воћних бомбона, па се смањује шанса да се други пут извади воћни бомбон.

Ако прво извади чоколадни бомбон (ако се догађај А не догоди), број бомбона у посуди се поново мења, али на другачији начин. Ово такође мења шансу да се догоди догађај В. Зато, догађај В зависи од догађаја А, односно, догађаји су зависни.

Задатак 6

У кутији се налазе 4 црвене и 3 плаве оловке. Наставница узима једну оловку, не враћа је, а затим узима још једну.

Запиши два зависна догађаја, а затим објасни зашто су зависни.

Задатак 7

Када се две коцкице баце у исто време, дешавају се следећи догађаји:

А: збир тачака које се појављују на врху коцкице је паран број, и

Б: исти број тачака се појављује на врху обе коцкице.

Објасни како су догађаји А и Б повезани.

Пример 7

У експерименту „истовремено бацање новчића и коцкице“, пронађи вероватноћу догађаја

А: на новчићу се појављује писмо, а на коцкици се појављују 6 тачака?

Догађаји

В: на новчићу се појављује писмо и С: 6 тачака се појављује на коцкици,

су независни догађаји, јер појава једног не утиче на појаву другог догађаја. Догађај А се појављује када се догађаји В и С појаве у исто време.

Вероватноћа догађаја А је

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Задатак 8

Јасмина и Леонтин шутирају на гол лоптом са удаљености од 3 m. Из претходног искуства Јасмин погађа 2 пута од свака 3 шута, док Леонтин погађа 4 пута од 7 шутирања. Ако обојица шутирају на гол у исто време, нађи вероватноћу:

а) Да обојица имају погодак, б) Да обојица промаше,
в) Да Јасмина постигне гол, а да Леонтин промаши.

Пример 8

У кутији се налазе 4 плава и 3 жута дугмета истог облика и величине (слика 2).
Два дугмета су насумично изабрана без гледања и без враћања.
Израчунај вероватноћу догађаја:
а) A: оба изабрана дугмета су жута и,
б) B: прво изабрано дугме је жуто, а друго дугме је плаво.



слика 2

а) Догађаји

A_1: прво изабрано дугме је жуто и A_2: друго изабрано дугме је жуто, су зависни догађаји јер се дугмад не враћају у кутију. Појава догађаја A_1 мења састав кутије на укупно 6 дугмади, од којих су 2 жута.
Стога се вероватноћа догађаја A_2 такође мења. Вероватноћа догађаја A_1 и A_2 је

$$P(A_1)=\frac{3}{7} \text{ и } P(A_2)=\frac{2}{6}.$$

Догађај A се дешава када се догађаји A_1 и A_2 појаве у исто време. Вероватноћа догађаја A је

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}.$$

б) Догађаји

B_1: прво изабрано дугме је жуто и B_2: друго изабрано дугме је плаво, су зависни догађаји, јер појављивање догађаја B_1 мења састав кутије на укупно 6 дугмади. Стога се вероватноћа догађаја B_2 такође мења. Вероватноћа догађаја B_1 и B_2 је

$$P(B_1)=\frac{3}{7} \text{ и } P(B_2)=\frac{4}{6}.$$

Догађај B се дешава када се догађаји B_1 и B_2 догоде у исто време. Вероватноћа догађаја B је

$$P(B)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

Задатак 9

У кутији се налази 5 зелених и 3 жуте бомбоне. Две гумене бомбоне се бирају једна за другом без замене. Израчунај вероватноћу догађаја:
а) обе изабране бомбоне су зелене,
б) прво се бира зелена бомбона, па жута бомбона,
в) прво се бира жута бомбона, па зелена бомбона,
г) обе изабране бомбоне су жуте.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. а) У експерименту бацања коцкице, одреди који су од догађаја независни, а који зависни:
   А: број тачака на горњој страни коцкице је дељив са 2,
   Б: број тачака на горњој страни коцкице је дељив са 3,
   В: број тачака на горњој страни коцкице је дељив са 2 и 3,
   Г: број тачака на горњој страни коцкице је непаран број.
   б) Који од датих догађаја под а) су међусобно искључиви?

2. Марија и Иван играју игру са коцкицама и новчићем. Марија баца коцкице и записује број који падне. Ако Марија баци паран број тачака, Иван баца новчић и види да ли ће пасти глава. Да ли су следећи догађаји зависни:
   А: Марија баца паран број, и
   Б: Иван баца новчић и види да ли ће пасти глава?
   Објасни свој одговор.

3. Школска еколошка секција има 3 дечака и 5 девојчица. Два члана су насумично изабрана за јутарњу еко-патролу. У вези са догађајима А и Б, одговори на следећа питања:
   Догађај А: Први изабрани члан је девојчица
   Догађај Б: Други изабрани члан је девојчица
   а) Да ли исход другог избора зависи од тога ко је први изабран?
   б) Да ли су ова два догађаја зависна или независна? Објасни.

4. Карте са бројевима од 1 до 20 су стављене у шешир. Јанко извлачи две карте једну за другом без враћања у шешир.
   Догађај А: Први извучени број је паран,
   Догађај В: Други извучени број је непаран,
   Догађај С: Први извучени број је прост,
   Догађај D: Други извучени број је прост.
   а) Да ли су догађаји А и В зависни или независни? Објасни.
   б) Да ли су догађаји С и D зависни или независни? Објасни.

5. У тегли се налазе 4 љубичаста жетона, 3 плава жетона и 1 златни жетон. Три жетона се извлаче један за другим без враћања. У вези са датим догађајима, одговори:
   а) Догађај А: Први извучени жетон је љубичаст
   Догађај В: Други извучени жетон је љубичаст.

Догађај C: Трећи извучени жетон је љубичаст.

– Да ли исход другог и трећег избора зависи од првог?

– Да ли су ови догађаји зависни или независни? Објасни.

б) Догађај D: Први жетон је љубичаст, други је љубичаст, трећи је златни.

– Да ли исход сваког наредног избора зависи од претходних?

– Објасни зашто су ови догађаји зависни.

в) Догађај E: Ниједан од извучених жетона није плав.

– Да ли ово зависи од редоследа извлачења?

6. Вики и Јаков треба да полажу возачки испит. Вики има 70% шансе да положи испит, а Јаков има 60% шансе да положи испит.

Наћи вероватноћу да:

а) обоје положе тест,

б) бар један од њих положи тест.

Упутство: Претвори проценте у разломке.

7. Тина и Семир играју пикадо. Они бацају стрелице ка истој мети.

Одговори на следећа питања у вези са догађајима A и B:

A: Тина погоди центар.

B: Семир погоди центар

а) Да ли су догађаји A и B независни или зависни? Објасни зашто.

б) Да ли су догађаји „Тина промашује и „Семир промашује“ независни или зависни? Објасни.

в) Вероватноћа да ће Тина погодити центар при игрању пикада је $\frac{1}{3}$, а вероватноћа да ће Семир погодити центар је $\frac{2}{5}$. Ако обоје истовремено гађају мету, наћи вероватноћу да:

i) обоје погоде центар,

ii) обоје промаше центар,

iii) Тина погоди центар, а Семир промаши.

8. У једном одељењу ученици треба да изаберу један пројекат за школску манифестацију. Бирало се између 3 могућности:

врста пројекта	број ученика који су изабрали
спортски пројекат	8
уметнички пројекат	6
научни пројекат	6

Сваки ученик бира само један пројекат (не може два истовремено).

а) Колико ученика има у одељењу?

б) Да ли се догађаји „ученик је изабрао спортски пројекат“ и „ученик је изабрао уметнички пројекат“ међусобно искључују? Објасни.

в) Колика је вероватноћа да је случајно изабрани ученик изабрао:

i) спортски пројекат, ii) уметнички пројекат, iii) научни пројекат.

г) Колика је вероватноћа да ученик није изабрао научни пројекат?

9. Пројектни задатак

У периоду од 7 дана изради мали пројекат у којем ћеш анализирати временску прогнозу и израчунати вероватноће за различите догађаје. На крају треба да припремиш извештај према фазама реализације пројекта:

1) Истражи на интернету и у извештају пројекта укратко објасни како метеоролози користе вероватноћу при професионалном прогнозирању времена (рачунарски модели, више сценарија, проценти вероватноће).
2) Прикупи податке за 5–7 узастопних дана за које ћеш преузети временску прогнозу (вероватноћа кише, ветра, температуре, опис времена). Податке запиши у табелу.
3) Израчунај вероватноћу за сваки од догађаја:
   – да буде сунчан дан,
   – да дува ветар,
   – да буде кише и ветра,
   – да буде дан погодан за шетњу.
4) За сваки од дана у твојој прогнози израчунај вероватноћу за догађај:
   A: Носићу кишобран (ако постоји могућност за кишу).
   Дфиниши супротан догађај B догађају A и израчунај његову вероватноћу.
   Провери да ли важи $P(A) + P(B) = 1$?
5) За температуре одабраних дана израчунај: просек, медијану, моду, ранг и представи их одговарајућим дијаграмом.
6) Изведи кратак закључак на основу следећих питања:
   - Како професионалци израчунавају вероватноће за временске прилике?
   - Колико су тачне прогнозе? Зашто понекад греше?
   - Како израчунате вероватноће утичу на свакодневне одлуке (избор одеће, путовање, организација активности)?
   - Како би се добила побољшана прогноза (са више модела, стварним мерењима или дужом временском серијом података)?

Истраживање

У школи се организује мала игра: баца се коцка за игру, а затим се извлачи куглица из кесе у којој се налазе: 2 плаве, 2 зелене и 1 црвена куглица.

а) Објасни зашто су независни догађаји:
   А: добити паран број на коцки, и Б: извући плаву куглицу из кесе.

б) Објасни зашто су независни догађаји:
   В: добити број већи од 4 на коцки, и Г: извући црвену куглицу.

Ученици извлаче 2 куглице једну за другом, без враћања.

в) Објасни зашто су зависни догађаји:
   Д: Прва извучена куглица је зелена, и Ђ: Друга извучена куглица је зелена.

г) Ако се прво извуче црвена куглица, размисли о догађају:
   Е: Друга извучена куглица је плава.

Зашто исход другог извлачења зависи од првог?

Практични део – Експеримент:
Направи експеримент са 20 покушаја: бацај коцку и извлачи куглице према правилима.
Запиши исходе у табелу. Да ли су забележени резултати слични претходним закључцима о независним и зависним догађајима?
Питања за размишљање:

1) Када је лакше размишљати о догађајима – када су они независни или зависни догађаји?
2) Ако се број куглица у кеси промени (на пример, 10 куглица), како ће то утицати на ситуацију?

ЗАДАЦИ ЗА ПОНАВЉАЊЕ И УТВРЂИВАЊЕ

1. Одреди да ли је одговарајуће користити попис или узорак из популације приликом истраживања:
   а) квалитета производње у фабрици електронских уређаја,
   б) броја ципела дечје популације у држави,
   в) броја ципела код деце из једног одељења,
   г) цена производа у сендвичари.
2. У школи која има 900 ученика случајно је изабрано 50 ученика који треба да одговоре на питања у вези са школским ужинама. Одреди број јединица у популацији и у узорку. Да ли је овако изабрани узорак репрезентативан за популацију?
3. Анкетна агенција је ангажована да истражи намере гласања становника одређеног региона за предстојеће изборе. На основу прикупљених података треба предвидети изборни резултат у том региону. Објасни зашто се у свакој од следећих ситуација добија неодговарајући узорак:
   а) анкетира се случајан избор људи у локалном великом тржном центру између 13:00 и 15:00 часова радним даном,
   б) анкетирају се сви чланови локалног шаховског клуба,
   в) случајни узорак људи на локалној железничкој станици анкетира се између 7:00 и 9:00 часова,
   г) спроводи се анкета од врата до врата, при чему се анкетира сваки гласач у једној одређеној улици.
4. Одреди да ли ће прикупљени подаци бити дискретни у следећим истраживањима:
   а) површина сваког парка у граду,
   б) брачни статус људи у насељу,
   в) број шибица у кутији,
   г) освојени поени на државном првенству у одбојци,
   д) маса прасади на фармама у нашој земљи.
   Објасни да ли је боље користити примарне или секундарне податке при сваком од наведених истраживања.

5. Димитар је саставио инструмент за прикупљање података како би истражио колико често људи иду у позориште. Он изгледа овако:

Дао је упитник да попуне неколико људи које је срео док су пролазили испред позоришта.

Запиши неколико неправилности у Димитровом истраживању и предложи нови, побољшани начин за прикупљање података.

УПИТНИК

Одласци у позориште
(са намерним неправилностима)

Ова анкета има за циљ да испита колико често људи иду у позориште.

1. Колико често идете у позориште?
   а) никада
   б) веома ретко (1–10 пута годишње)
   в) понекад (више од 2 пута годишње)
   г) увек
2. Који тип на претстави најчешће ти гледате?
   а) комедије б) драме
   в) не гледам представе
3. Зашто идете у позориште?
   а) због забаве б) због образовања
   в) заједно са пријатељима г) не знам
4. Када сте последњи пут били у позоришту?
   а) пре годину дана б) пре 5 година
   в) пре неколико месеци г) никада

6. Менаџмент болнице жели да сазна старост пацијената који су хоспитализовани због кардиоваскуларних болести у месецу октобру.
Прикупљени су следећи подаци:

32	58	72	45	89	68	63	47	54	51
84	17	58	64	67	71	75	69	63	82
76	68	29	48	89	66	24	59	70	74
80	63	4	32	46					

а) Направи табелу фреквенција за груписане податке са класама 0-15, 16-31, 32-47, ...
б) Пронађите модалну класу.
в) Пронађи класу која садржи медијану.
г) Изрази у процентима удео пацијената у модалној класи.
д) Да ли класа која садржи медијану или модална класа пружа бољу укупну слику старосне структуре пацијената? Зашто?
ђ) Процени просечну старост пацијената.

7. Маркетиншка агенција бележи број телефонских позива сваког дана током периода од 30 дана.

18	32	25	37	24	28	35	42	31	16
28	38	30	41	27	31	46	17	35	26
32	14	44	37	48	23	19	33	15	36

Прикажи податке помоћу табеле фреквенција за груписане податке у 4 групе.
Пронађи модалну класу. Колики је проценат дана када је агенција примила најмање 30 позива?

8. Четрдесет фудбалера на тренинг кампу је упитано на којој позицији играју. Резултати су дати доле, где Н означава нападача, С је играч на средини, О је одбанбени играч, а Г је голман:

Н	О	С	С	Н	С	О	Н	Г	С
С	О	Н	О	С	О	Н	С	О	Г
Н	Г	С	О	Н	О	С	О	Н	С
О	Г	С	Н	С	О	Г	С	С	Н

а) Представи податке у табели фреквенција. Да ли су подаци у табели груписани и зашто?
б) Која је карактеристика и која је популација у истраживању?
в) Пронађи мод података. Објасни шта прдставља.
г) Колики проценат играча су били одбрамбени играчи или голмани?
д) Прикажи податке секторским дијаграмом.

9. Искористи секторски дијаграм на цртежу 1 да би одговорио/ла на питања везана за присуство ланаца супермаркета у земљи.
а) Који ланац супермаркета има највише продавница?
б) Ако је број супермаркета 12 582, пронађи колико од њих су:
1) Јефтини, 2) Све на једном месту, 3) Независни.



цртеж 1

10. Од 60 путника у аутобусу, 12 од њих је било предшколског узраста, 11 су били студенти, 22 одраслих и 15 пензионера. У возу је било 90 путника: 23 предшколске узрасти, 12 студената, 40 одраслих и 15 пензионера. Нацртај секторски дијаграм за свако превозно средство и упореди старосне структуре путника. Одговори на следећа питања:
а) Колико од путника у аутобусу су одрасли или пензионери?
б) Колики проценат путника у возу су деца или студенти?
в) У возу и аутобусу је једнак број пензионера. Зашто су на секторском дијаграму углови који одговарају на ова два сектора различити?

11. Технолог надгледа процес производње јестивог уља у фабрици (*цртеж* 2). Линијски дијаграм приказује запремину уља сакупљеног у одговарајућој посуди током једног дана.



цртеж 2

Три пута током дана из контејнера је узвађено уље ради испитивања квалитета.

а) Колико уља је произведе у 7 сати?

б) Колико уља се узима сваки пут ради контроле квалитета?

в) Колика је укупна количина уља произведена у току дана?

12. За узорак ученика осмог разреда приказане су њихове телесне масе помоћу дијаграма стабло–лист

3	2 4 8
4	0 4 4 7 9 9 9
5	0 0 1 2 2 3 3 5 6 8 8
6	0 1 2 4 4 5 7 9
7	0 2 6
8	4
9	1

Кључ. 9|1 представља 91 kg

Нађи: а) највећу масу, б) најмању масу,
в) медијану, г) распон маса,
д) број ученика који имају масу од најмање 70 kg,
ђ) проценат ученика који имају масу мању од 48 kg.

13. За податке приказане дијаграмом стабло–лист одреди моду, медијану и распон.

3	8 9
4	2 2 5
5	0 1 1 7 9
6	1 3 4
7	0

Кључ: 3|8 представља 3,8

14. Број одсутних ученика у једној школи бележен је током 40 дана у зимском периоду:

21	16	23	24	18	29	35	37	41	38
25	23	17	26	34	33	10	27	49	52
24	20	25	23	19	22	12	16	17	15
33	43	14	28	41	14	29	31	32	34

а) Направи дијаграм података у облику стабла и листа.

б) Пронађи највећи и најмањи број изостанака за зимски период.

в) Колики је проценат дана када је најмање 40 ученика било одсутно?

г) Присуство се назива „добро“ ако је мање од 25 ученика одсутно током зимског периода. Колики је проценат када је присуство ученика било добро?

15. Претпоставимо да догађај A, да ће сутра падати киша, има вероватноћу P (A) = 0,03.

а) Одреди супротан догађај B од догађаја A. б) Пронађи P (B).

16. Запиши елементарне догађаје код експеримента:
а) случајан избор месеца у години,
б) окретање вртешке на којој су означена три поља са словима A, B и C,
в) избор двоцифреног броја мањег од 20,
г) избор парног броја из скупа садржилаца броја 3 мањих од 30,
д) избор врсте пецива у пекари у којој се продају кифле са сусамом, бурек и перек.

17. Маја и Каја бирају комплетан мени у ресторану. Мени садржи по избору: 3 врсте куваних јела, 4 врсте пића и 2 врсте десерта. Запиши све могућности избора које имају Маја и Каја.

18. Дате су две вртешке као на цртежу 3. Илир и Иван играју игру тако што их окрећу истовремено и записују на које слово је пала стрелица. После 10 окретања покушавају да саставе реч од добијених слова. Који су елементарни догађаји који могу да се појаве при једном окретању обе вртешке истовремено?



цртеж 3

19. Ерблина је груписала бројеве од 2 до 10 у две групе: просте и сложене бројеве. Она бира један број из сваке групе по случајном избору. Одреди све елементарне догађаје у Ерблином експерименту и пронађи вероватноћу да ће она изабрати:
а) 3 и 8, б) два непарна броја, в) два броја чији је збир 13, г) узастопне бројеве.

20. На *цртежу* 4 је дат комплет кугли за билијар. Ако се кугла бира случајним избором, која је вероватноћа да је:
а) изабрана бела кугла, б) изабрана зелена кугла, в) изабран број мањи од 8?



цртеж 4

21. У градском биоскопу продато је 20 карата за одрасле, 16 карата са попустом и 9 карата за децу. Из публике је случајним избором изабрана једна особа. Пронађи вероватноћу да:
а) она има карту са попустом, б) карту за одрасле, в) карту која није за децу.

22. На *цртежу* 5 је дата дечја слагалица. По случајном избору узима се један део. Пронађи вероватноћу да је изабран:
а) део из неког од углова слагалице (са две праве стране),
б) део са једном правом страном,
в) део који има најмање једну праву страну,
г) део који нема праве стране.



цртеж 5

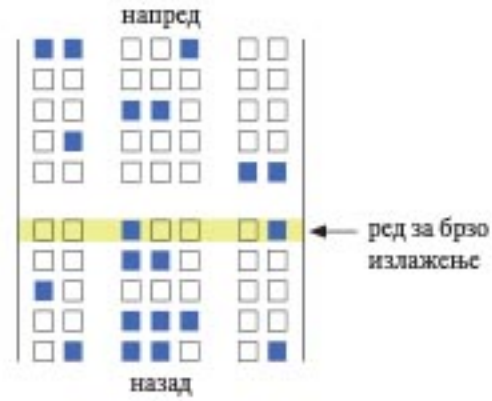
23. На *цртежу* 6 је дат распоред и слободна места у авиону којим путујеш. Заузета седишта су обојена плавом бојом. Ако случајним избором заузмеш неко од слободних места, која је вероватноћа да:

а) ћеш седети у предњем реду,

б) ћеш седети у реду за брзи излазак,

в) ћеш седети до прозора,

г) ћеш седети поред пролаза.



цртеж 6

24. Кугла се вади из торбе A и ставља у торбу B, а затим се из торбе B извлачи кугла по случајном избору (*цртеж* 7). Нека је:

A: прва извучена кугла из торбе A је црвена, и

B: друга извучена кугла из торбе B је црвена.

а) Да ли исход другог избора из торбе B зависи од тога која је кугла прво извађена из торбе A?

б) Да ли су ови догађаји зависни или независни?



цртеж 7

25. Претпостави да се случајним избором извлачи кугла из кутија на *цртежу* 8. Нека је:

A: извучена је црвена кугла из кутије X, и

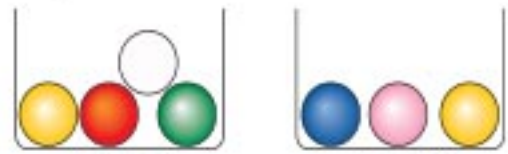
B: извучена је плава кугла из кутије Y.

а) Да ли су догађаји A и B зависни или независни? Објасни зашто.

б) Колика је вероватноћа да се извуче зелена кугла из кутије X?

в) Колика је вероватноћа да се извуче жута кугла из кутије Y?

г) Ако се из кутије X извуче бела кугла и не врати се назад, колика је вероватноћа да се извуче свака друга кугла из кутије X?



цртеж 8

26. При експерименту бацања навртке 400 пута, она је пала 84 пута усправно, а осталих пута на страну (*цртеж* 9).

а) Пронађи експерименталну вероватноћу да навртка, када се баци, падне на страну.

б) Процени вероватноћу да, када се баце две навртке, оне падну:

1) обе усправно,

2) обе на страну.



цртеж 9

27. Једна вртешка има 6 једнаких поља: 3 црвена, 2 плава и 1 жуто. Друга вртешка има 7 једнаких поља: 4 љубичаста и 3 зелена. Обе вртешке се окрећу истовремено. Пронађи вероватноћу да ће се при окретању добити:

а) црвено и зелено поље, б) плаво и љубичасто поље,

в) жуто и зелено поље, г) црвено и љубичасто поље.

РЕФЕРЕНЦЕ

1. Baron, Lorraine, et al. Math 8: Make Sense. Pearson, 2008.
2. Haese, Michael, et al. Grade 8 Mathematics for the International Student. 2016.
3. Pimentel, Ric, and Terry Wall. Mathematics. Hodder Education, 2013.
4. Rayner, David, Ian Bettison, Mathew Taylor. Complete Mathematics. Edited by Deborah Barton, Oxford University Press, 2023.
5. Целакоски, Наум. Дидактика на математиката. Нумерус, 1993.
6. Бакева, Верица. Веројатност. УКИМ–ФИНКИ, 2016.